

УДК 517.518.14

Нгуен Ван Куинь

Кандидат физико-математических наук, старший преподаватель

Факультета фундаментальной науки,

университет Ханой промышленности, Ha Noi, Вьетнам.

E-Mail: nguyenvanquynh@hau.edu.vn.

Нгуен Ван Мань

Магистр математических наук, старший преподаватель

Факультета фундаментальной науки, университет Ханой

промышленности, Ha Noi, Вьетнам.

E-Mail: nvmanhhhn@hau.edu.vn.

РАДОНОВЫЕ СВОЙСТВА ПРЕДЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ

Аннотация: Теория меры играет важную роль в теории субгармонических и δ -субгармонических функций. Классические свойства меры были представлены во многих монографиях, например в [1]. В статье представляется усиление варианта Азарина теоремы об компактном множестве в пространстве радоновых мер. Результаты нашей статьи позволяют несколько упростить конструкции из этих работ.

Ключевые слова: мера Хана, мера Жордана, сингулярная положительная мера, линейный непрерывный функционал, радоновая мера .

Nguyen Van Quynh.

PhD in Physics and Mathematics, Lecturer

Faculty of Basic Science, Hanoi University of Industry, Ha Noi, Vietnam

E-Mail: nguyenvanquynh@hau.edu.vn.

Nguyen Van Manh.

Master of Mathematical Sciences, Lecturer

Faculty of Basic Science, Hanoi University of Industry, Ha Noi, Vietnam.

E-Mail: nvmanhhhn@hau.edu.vn.

RADON PROPERTIES OF LIMIT SETS

Abstract: *Measure theory plays an important role in the theory of subharmonic and δ -subharmonic functions. The classical properties of a measure have been presented in many monographs, for example, in [1]. In the article we sharpen Azarin's variant of the theorem on a compact set in the space of Radon measures. The results of our article allow us to simplify the constructions from these articles somewhat.*

Key words: *Hahn measure, Jordan measure, singular positive measure, linear continuous functional; Radon measures, compact set.*

Уточнённый порядок играет важную роль в теории роста субгармонических функции, в ряде других разделов математики.

Абсолютно непрерывная функция $\rho(r)$ на полуоси $(0, \infty)$ называется уточнённым порядком, если выполняются следующие два условия :

- 1) существует предел $\lim_{r \rightarrow +\infty} \rho(r) = \rho(\infty) = \rho \in (-\infty, \infty)$,
- 2) $\lim_{r \rightarrow +\infty} r \ln r \rho'(r) = 0$.

В приложениях чаще всего используется не сам уточнённый порядок $\rho(r)$, а функция $V(r) = r^{\rho(r)}$. Отметим следующее свойство уточнённого порядка.

Теорема 1. для любого $t > 0$ существует предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{V(tr)}{V(r)} = t^\rho,$$

и этот предел равномерный на любом сегменте $[a, b] \subset (0, \infty)$.

Если $\rho(r)$ – уточнённый порядок, то существует дифференцируемый, и даже аналитический, уточнённый порядок $\rho_1(r)$ такой, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{V(r)}{V_1(r)} = 1,$$

где $V_1(r) = r^{\rho_1(r)}$.

Поэтому предположение о дифференцируемости уточнённого порядка часто не ограничивает общности рассуждений. В дальнейшем мы будем предполагать, что функция $\rho(r)$ является непрерывно дифференцируемой на полуоси $(0, \infty)$.

Рост произвольной функции $f(r)$ сравнивается с ростом функции вида $V(r)$.

Множество функций вида $V(r)$ – это более широкое множество, чем множество степеней r^α , $\alpha \in (-\infty, \infty)$, или множество функций вида $r^{\alpha_0} (\ln r)^{\alpha_1} (\ln_2 r)^{\alpha_2} \dots (\ln_k r)^{\alpha_k}$, где α_m – вещественные числа, а $\ln_m r$ – это m -тая итерация логарифма. Например, $\ln_2 r = \ln \ln r$.

Пусть $f(r)$ – положительная функция на полуоси $(0, \infty)$. Порядком функции f называется число

$$\rho = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln f(r)}{\ln r}.$$

Важность понятия уточнённого порядка в теории роста функций можно усмотреть из следующей теоремы.

Положительная на полуоси $(0, \infty)$ функция $f(r)$ называется регулярно меняющейся в смысле Караматы, если для любого $\lambda > 0$ существует конечный предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{f(\lambda r)}{f(r)}.$$

Пусть $\rho(t)$ – некоторый уточнённый порядок. На пространстве R_C определяется одно-параметрическое семейство преобразований Азарина $A_t: R_C \rightarrow R_C$, $t \in (0, \infty)$, согласно формулам

$$\mu_t = A_t \mu, \mu_t(E) = \frac{\mu(tE)}{V(t)},$$

Для любого борелевского множества E .

Пусть $\varphi \in \Phi(R_0^n)$. Формула переменных даёт

$$\int_{R_0^n} \varphi(x) d\mu_t(x) = \frac{1}{V(t)} \int_{R_0^n} \varphi\left(\frac{x}{t}\right) d\mu(t). \quad (4.1)$$

Пусть множество $\left\{v \in R_C : v = \lim_{m \rightarrow \infty} A_{t_m} \mu, \lim_{m \rightarrow \infty} t_m = +\infty\right\}$ будем называть предельным множеством Азарина для меры μ и обозначим через $Fr[\mu]$.

В случае вещественных радоновых мер наряду с предельным множеством Азарина $Fr[\mu]$ важными асимптотическими характеристиками меры μ являются её верхняя конусная плотность $\Delta(E)$ и нижняя конусная плотность $\underline{\Delta}(E)$, а также верхняя плотность $N(\alpha, E)$ и нижняя плотность $\underline{N}(\alpha, E)$. Пусть $r_0 > 0$ – некоторое фиксированное число, E – борелевское подмножество единичной сферы S_{n-1} в пространстве R_0^n , $f(r, E) = \mu([r_0, r] \times E)$. Тогда указанные выше величины определяются следующим образом

$$\Delta(E) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{f(r, E)}{V(r)}, \underline{\Delta}(E) = \underline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{f(r, E)}{V(r)},$$

$$N(\alpha, E) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{f(r + \alpha r, E) - f(r, E)}{V(r)}, \underline{N}(\alpha, E) = \underline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{f(r + \alpha r, E) - f(r, E)}{V(r)}. \quad (4.2)$$

Заметим, что величины $\Delta(E)$ и $\underline{\Delta}(E)$ имеет смысл определить только в случае, если уточнённый порядок $\rho(r)$ таков, что $\rho = \lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) > 0$. Это особенно наглядно для случая положительной меры. В случае $\rho > 0$ величины $\Delta(E)$ и $\underline{\Delta}(E)$ не зависят от выбора числа r_0 .

Заметим, что величины $N(\alpha, E)$ и $\underline{N}(\alpha, E)$ не зависят от r_0 для любых уточнённых порядков $\rho(r)$. Эти величины имеют смысл рассматривать для любых уточнённых порядков. Эти величины являются важными характеристиками мер, как в случае $\rho > 0$, так и в случае $\rho \leq 0$.

В общем случае, когда нет связи между мерой μ и уточнённым порядком $\rho(r)$ каждая из четырёх величин является элементом расширенного множества вещественных чисел $[-\infty, \infty]$. Обычно величины $N(\alpha, E)$ и $\underline{N}(\alpha, E)$ рассматривают как функции на полу-оси $\alpha \geq 0$. Однако, иногда удобно считать эти величины функциями на полуоси $\alpha > -1$.

Из свойств пределов и уточнённого порядка $\rho(r)$ вытекают следующие соотношения

$$N(\alpha + \beta, E) \leq N(\alpha, E) + (1 + \alpha)^p N\left(\frac{\beta}{1 + \alpha}, E\right), \quad (4.3)$$

$$N(\alpha + \beta, E) \geq N(\alpha, E) + (1 + \alpha)^p \underline{N}\left(\frac{\beta}{1 + \alpha}, E\right), \quad (4.4)$$

$$\underline{N}(\alpha + \beta, E) \leq \underline{N}(\alpha, E) + (1 + \alpha)^p \underline{N}\left(\frac{\beta}{1 + \alpha}, E\right), \quad (4.5)$$

$$\underline{N}(\alpha + \beta, E) \leq \underline{N}(\alpha, E) + (1 + \alpha)^p N\left(\frac{\beta}{1 + \alpha}, E\right), \quad (4.6)$$

где $\rho = \rho(\infty) = \lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r)$.

Определение 4.1. Пусть $\rho(r)$ – произвольный уточнённый порядок. Обозначим через $M_\infty(\rho(r))$ множество мер $\mu \in \mathfrak{R}_C(\mathbb{R}_0^n)$ таких, что для некоторого $\alpha > 0$ для верхней плот-ности меры $|\mu|$ относительно уточнённого порядка $\rho(r)$ выполняется неравенство

$$N(|\mu|, \alpha, S_{n-1}) < \infty.$$

Заметим, что если $\mu \in M_\infty(\rho(r))$, то неравенство $N(|\mu|, \alpha, S_{n-1}) < \infty$ выполняется для любого $\alpha > 0$. Теперь из неравенства (4.17), применённого к мере $|\mu|$ и локальной конечности этой меры следует, что неравенство

$$|\mu|([r, (r + \alpha)r] \times S_{n-1}) \leq M V(r)$$

с некоторой постоянной $M = M(\alpha)$ выполняется для всех $r \geq 1$. Таким образом, множество $M_\infty(\rho(r))$ совпадает с множеством тех мер $\mu \in \mathfrak{R}_C(\mathbb{R}_0^n)$, для которых для любого $q > 1$ величина

$$A(q) = \sup_{r \geq 1} \frac{|\mu|([r, qr] \times S_{n-1})}{V(r)}$$

конечна. Из локальной ограниченности меры μ следует также конечность величины

$$A(q, r_0) = \sup_{r \geq r_0} \frac{|\mu|([r, qr] \times S_{n-1})}{V(r)} \quad \text{при } r_0 > 0. \quad (4.18)$$

Определение 4.2. Пусть $\rho(r)$ – произвольный уточнённый порядок. Обозначим через $M(\rho(r))$ множество мер $\mu \in M_\infty(\rho(r))$, для которых существует $\alpha > 0$ такое, что

$$\dot{N}(|\mu|, \alpha, S_{n-1}) < \infty.$$

Напомним, что функция $\dot{N}$ определяется формулой (4.7).

Справедливо следующее утверждение. Множество $M(\rho(r))$ состоит из тех мер $\mu \in M$, для которых для любого $q > 1$ величина

$$B(q) = \sup_{r > 0} \frac{|\mu|([r, qr] \times S_{n-1})}{V(r)}$$

конечна.

Из соотношения $\mu \in M_\infty(\rho(r))$ легко следует, что положительная полутраектория μ_t (множество $\{\mu_t : t \in [1, \infty)\}$) является компактным множеством. Сформулируем это утверждение в виде отдельной леммы.

Лемма 1. Пусть $\rho(r)$ – произвольный уточнённый порядок, $\mu \in M_\infty(\rho(r))$. Тогда полутраектория $\mu_t, t \geq 1$, есть компактное множество радоновских мер.

Доказательство.

Пусть $0 < a < b < \infty$. Используя неравенства (4.18) и $V(tr) \leq t^\alpha \gamma(t) V(r)$ ($t, r > 0$), получаем оценку

$$|\mu_t|([a, b] \times S_{n-1}) = \frac{|\mu|([at, bt] \times S_{n-1})}{V(t)} = A\left(\frac{b}{a}, a\right) \frac{V(ta)}{V(t)} \leq a^\alpha \gamma(a) A\left(\frac{b}{a}, a\right).$$

Теперь утверждение леммы следует из теоремы 3.4. Лемма доказана.

Далее наша задача состоит в описании свойств предельных множеств мер из класса $M_\infty(\rho(r))$. Вначале мы сформулируем теорему, которая позволяет свести эту задачу к более простому случаю, когда $\rho(r) \equiv \rho$.

Теорема 2. Пусть $\rho_1(r)$ и $\rho_2(r)$ – уточнённые порядки такие, что $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho_1(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \rho_2(r) = \rho$. Пусть $\mu \in M_\infty(\rho_1(r))$, а мера λ определяется равенством

$$d\lambda(x) = \frac{V_2(\|x\|)}{V_1(\|x\|)} d\mu(x).$$

Тогда $\lambda \in M_\infty(\rho_2(r))$ и соотношения $\mu_{t_m} \rightarrow \nu$, $\lambda_{t_m} \rightarrow \nu$ эквивалентны. Здесь

$$\begin{aligned} \mu_t(E) &= \frac{\mu(tE)}{V_1(t)}, & \lambda_t(E) &= \frac{\lambda(tE)}{V_2(t)}, \\ V_1(t) &= t^{\alpha_1(t)}, & V_2(t) &= t^{\alpha_2(t)}. \end{aligned}$$

Доказательство. Имеем

$$|\lambda|(B(0, 2r) \setminus C(0, r)) = \int_{B(0, 2r) \setminus C(0, r)} \frac{V_2(\|x\|)}{V_1(\|x\|)} d|\mu|(x).$$

Из теоремы 2.1 легко следует, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{|\lambda|(B(0, 2r) \setminus C(0, r))}{V_2(r)} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{|\mu|(B(0, 2r) \setminus C(0, r))}{V_1(r)}.$$

Из того, в свою очередь, следует, что $\lambda \in M_\infty(\rho_2(r))$.

Пусть $\mu_{t_m} \rightarrow \nu$, $\varphi \in \Phi$. Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}_0^n} \varphi(x) d\lambda_{t_m}(x) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{V_2(t_m)} \int_{\mathbb{R}_0^n} \varphi\left(\frac{u}{t_m}\right) d\lambda(u) = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{V_2(t_m)} \int_{\mathbb{R}_0^n} \varphi\left(\frac{u}{t_m}\right) \frac{V_2(\|u\|)}{V_1(\|u\|)} d\mu(u) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}_0^n} \varphi(\tau) \frac{V_2(\|t_m \tau\|)}{V_1(\|t_m \tau\|)} \frac{V_1(t_m)}{V_2(t_m)} d\mu_{t_m}(\tau) \end{aligned}$$

Так как последовательность

$$\varphi(\tau) \frac{V_2(\|t_m \tau\|)}{V_1(\|t_m \tau\|)} \frac{V_1(t_m)}{V_2(t_m)}$$

сходится в пространстве Φ к функции $\varphi(\tau)$ и $\mu_{t_m} \rightarrow \nu$, то следует, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}_0^n} \varphi(x) d\lambda_{t_m}(x) = \int_{\mathbb{R}_0^n} \varphi(\tau) d\nu(\tau).$$

Тем самым мы доказали, что $\lambda_{t_m} \rightarrow \nu$. В доказанном утверждении можно поменять местами μ и ν . Теорема доказана.

Отображение A_t , $A_t \mu = \mu_t$, в случае, когда $\rho(r) \equiv \rho$ мы будем обозначать F_t или $F_t(\rho)$. В следующей теореме приводятся ряд свойств предельного множества $Fr[\mu]$.

Теорема 3. Пусть $\rho(r)$ – произвольный уточнённый порядок, $\mu \in M_\infty(\rho(r))$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $Fr[\mu]$ есть непустой компакт,
- 2) $Fr[\mu]$ есть связное множество в метрическом пространстве $(\mathfrak{R}_c, d)$,

3) множество $Fr[\mu]$ инвариантно относительно преобразования F_t , более того F_t есть взаимно однозначное отображение множества $Fr[\mu]$ на себя.

Доказательство. Как следует из теоремы 4.3, не ограничивая общности, можно считать, что $\rho(r) \equiv \rho$. По лемме 4.5 полутраектория $\mu_t, t \geq 1$, является компактным множеством. На языке динамических систем это утверждение переформулируется так. Движение μ_t положительно устойчиво по Лагранжу. На компактных множествах в $\mathbb{R}_C$ широкая сходимость последовательности μ_m эквивалентна сходимости в метрическом пространстве $(\mathbb{R}_C, d)$. Поэтому предельное множество Азарина $Fr[\mu]$ совпадает с ω -предельным множеством траектории μ_t в метрическом пространстве $(\mathbb{R}_C, d)$. Теперь мы можем использовать достаточно развитую теорию динамических систем в метрических пространствах. Теорема 10, глава 5, § 3 из книги [6] утверждает, что $Fr[\mu]$ есть непустой компакт, который отображение μ_t взаимно однозначно отображает на себя, а теорема 14 из этой книги утверждает, что $Fr[\mu]$ есть связное множество. Теорема доказана.

Список литературы

1. Kadets, V.M. (2006), A course of Functional Analysis, Kharkov National University.
2. Van Quynh Nguyen (2015), Various Types of Convergence of Sequences of Subharmonic Functions, Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom, Volume 11, Number 1, 63–74.
3. Nguyen Van Quynh, Theorem on uniform continuity of Logarithmic potential, Visnyk of science and education, Issue 5 (59), 6-10p.
4. Nguyen Van Quynh, Le Anh Thang (2021), THEOREM ON THE REPRESENTATION MEASURES "Мировая наука" №3 (48) 2021.
5. Nguyen Van Quynh, Le Anh Thang (2021), THEOREM ON A COMPACT SET IN THE SPACE OF RADON MEASURES "Мировая наука" №11 (56) 2021.