УДК 517.518.14

Нгуен Ван Куинь

Кандидат физико-математических наук, старший преподаватель

Факультета фундаментальной науки,

университет Ханой промышленности, Ha Noi, Вьетнам.

E-Mail: nguyenvanquynh@haui.edu.vn.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПРЕДЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ АЗАРИНА.

Аннотация: *Теория меры играет важную роль в теории субгармонических и δ -субгармонических функций. Классические свойства меры были представлены во многих монографиях, например в [1]. В статье представляется усиление варианта Азарина теоремы об предельных множеств радоновых мер. Результаты нашей статьи позволяют несколько упростить конструкции из этих работ.*

Ключевые слова: *мера Хана, мера Жордана, сингулярная положительная мера, линейный непрерывный функционал, радоновая мера* .

Nguyen Van Quynh.

PhD in Physics and Mathematics, Lecturer

Faculty of Basic Science, Hanoi University of Industry, Ha Noi, Vietnam

E-Mail: nguyenvanquynh@haui.edu.vn.

ASYMPTOTIC PROPERTIES OF AZARIN LIMIT SETS.

Abstract: *Measure theory plays an important role in the theory of subharmonic and δ -subharmonic functions. The classical properties of a measure have been presented in many monographs, for example, in [1]. In the article we sharpen Azarin's variant of the theorem on limit sets in the space of Radon measures. The*

results of our article allow us to simplify the constructions from these articles somewhat.
Key words: *Hahn measure, Jordan measure, singular positive measure, linear continuous functional; Radon measures, compact set.*

Пусть $\rho(t)$ – некоторый уточнённый порядок. На пространстве $\Re_C$ определяется однопараметрическое семейство преобразований Азарина A_t: $\Re_C \to \Re_C$, $t \in (0,\infty)$, согласно формулам

$$\mu_t = A_t \mu, \qquad \mu_t(E) = \frac{\mu(tE)}{V(t)},$$

Для любого борелевского множества E.

Пусть $\phi \in \Phi(R_0^n)$. Формула переменных даёт

$$\int_{\mathbb{R}_0^n} \varphi(x)\,d\mu_t(x) = \frac{1}{V(t)} \int_{\mathbb{R}_0^n} \varphi\left(\frac{x}{t}\right) d\mu(x) \quad (1)$$

Пусть множество $\left\{ \nu \in \Re_C : \nu = \lim_{m\to\infty} A_{t_m}\mu, \lim_{m\to\infty} t_m = +\infty \right\}$ будем называть предельным множеством Азарина и обозначим через $Fr[\mu]$.

В случае вещественных радоновых мер наряду с предельным множеством Азарина $Fr[\mu]$ важными асимптотическими характеристиками меры μ являются её верхняя конусная плотность $\overline{\Delta}(E)$ и нижняя конусная плотность $\underline{\Delta}(E)$, а также верхняя плотность $\overline{N}(\alpha,E)$ и нижняя плотность $\underline{N}(\alpha,E)$. Пусть $r_0 > 0$ – некоторое фиксированное число, E– борелевское подмножество единичной сферы S_{n-1} в пространстве $\mathbb{R}^n$, $f(r,E) = \mu((r_0,r]\times E)$. Тогда указанные высшие величины определяются следующим образом

$$\overline{\Delta}(E) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{f(r,E)}{V(r)}, \qquad \underline{\Delta}(E) = \underline{\lim}_{r\to\infty} \frac{f(r,E)}{V(r)},$$

$$\overline{N}(\alpha,E) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{f(r+\alpha r,E) - f(r,E)}{V(r)}, \quad \underline{N}(\alpha,E) = \underline{\lim}_{r\to\infty} \frac{f(r+\alpha r,E) - f(r,E)}{V(r)} \quad (2)$$

Заметим, что величины $\overline{\Delta}(E)$ и $\underline{\Delta}(E)$ имеет смысл определить только в случае, если уточнённый порядок $\rho(r)$ таков, что $\rho = \lim_{r\to\infty} \rho(r) > 0$. Это особенно наглядно для случая положительной меры. В случае $\rho > 0$ величины $\overline{\Delta}(E)$ и $\underline{\Delta}(E)$ не зависят от выбора числа r_0.

Заметим, что величины $N(\alpha,E)$ и $\underline{N}(\alpha,E)$ не зависят от r_0 для любых уточнённых порядков $\rho(r)$. Эти величины имеют смысл рассматривать для любых уточнённых поряд-ков. Эти величины являются важными характеристиками мер, как в случае $\rho > 0$, так и в случае $\rho \le 0$.

В общем случае, когда нет связи между мерой μ и уточнённым порядком $\rho(r)$ каждая из четырёх величин является элементом расширенного множества вещественных чисел $[-\infty,\infty]$. Обычно величины $N(\alpha,E)$, $\underline{N}(\alpha,E)$ рассматривают как функции на пол-уоси $\alpha \ge 0$. Однако, иногда удобно считать эти величины функциями на полуоси $\alpha > 1$.

Из свойств пределов и уточнённого порядка $\rho(r)$ вытекают следующие соотношения

$$N(\alpha+\beta,E) \le N(\alpha,E)+(1+\alpha)^{\rho} N\left(\frac{\beta}{1+\alpha},E\right), \tag{3}$$

$$N(\alpha+\beta,E) \ge N(\alpha,E)+(1+\alpha)^{\rho} \underline{N}\left(\frac{\beta}{1+\alpha},E\right), \tag{4}$$

$$\underline{N}(\alpha+\beta,E) \ge \underline{N}(\alpha,E)+(1+\alpha)^{\rho} \underline{N}\left(\frac{\beta}{1+\alpha},E\right), \tag{5}$$

$$\underline{N}(\alpha+\beta,E) \le \underline{N}(\alpha,E)+(1+\alpha)^{\rho} N\left(\frac{\beta}{1+\alpha},E\right), \tag{6}$$

где $\rho = \rho(\infty) = \lim\limits_{r\to\infty} \rho(r)$.

В общем случае функция $N(\alpha,E)$ $\left(\underline{N}(\alpha,E)\right)$ является не числовой функцией, а фун-кцией со значениями из расширенной числовой прямой $[-\infty,+\infty]$. Поэтому в неравенс-твах (3)-(6) правая часть не всегда имеет смысл. Если в каком-то из этих неравенств правая часть не имеет смысла, то соответствующее неравенство нужно считать пустым утверждением. По другому можно сказать так. Мы считаем, что неравенства $x \le \infty - \infty$, $x \ge \infty - \infty$ выполняются для любого $x \in [-\infty,+\infty]$.

Пусть мера μ положительна, то функция $N(\alpha,E)$ будет возрастающей. В этом случае из равенства (4) следует, что если $N(\alpha,E)$ конечна для некоторого $\alpha > 0$, то она конечна для любого $\alpha > 0$. Отметим ещё, что для вещественных мер из неравенств (4), (6) следует, что если функция $N(\alpha,E)$ ограничена сверху на некотором интервале $(0,\delta)$, то она ограничена сверху на любом интервале $(0,a)$, а если функция $\underline{N}(\alpha,E)$ ограничена снизу на некотором интервале $(0,\delta)$, то она ограничена снизу на любом интервале $(0,a)$.

Легко видеть, что для того, чтобы обе функции $\overline{N}(\alpha,E)$ и $\underline{N}(\alpha,E)$ были непрерывными на полуоси $[0,\infty)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\lim_{\alpha\to+0}\overline{N}(\alpha,E)=0, \qquad \lim_{\alpha\to+0}\underline{N}(\alpha,E)=0.$$

Обозначим $f_0(r,E)=\mu((r,r_0]\times E)$, $r<r_0$. Иногда мы будем рассматривать функцию

$$\mathring{N}(\alpha,E)=\overline{\lim_{r\to 0}}\frac{f_0(r,E)-f_0(r+\alpha r,E)}{V(r)}=\overline{\lim_{r\to 0}}\frac{\mu((r,r+\alpha r]\times E)}{V(r)}. \qquad (7)$$

Иногда возникает необходимость оценивать функцию $f(r,E)$ с помощью функций $\overline{N}(\alpha,E)$ и $\underline{N}(\alpha,E)$. В этом случае наряду с функцией $V(r)=r^{\rho(r)}$ полезна функция

$$S_1(r)=1+\int_1^r\frac{V(t)}{t}dt.$$

Как показывает опыт, применение функции $S_1(r)$ становится неэффективным, если эта функция является ограниченной. В случае ограниченности функции $S_1(r)$ применяют функцию

$$S_2(r)=\int_r^\infty\frac{V(t)}{t}dt.$$

С помощью правила Лопиталя получаем, что

$$\lim_{r\to\infty}\frac{V(r)}{S_1(r)}=\rho. \qquad (S_1(r) \text{ – не ограничена}) \qquad (8)$$

Имеем

$$\int_r^{er}\frac{V(t)}{t}dt=r^{n-2}\int_1^e\frac{V(\mathrm{ur})}{u}du.$$

Поскольку

$$\frac{V(ur)}{V(r)}\rightrightarrows u^\rho, \qquad r\to\infty, \qquad u\in[1,e],$$

то

$$\int_r^{er}\frac{V(t)}{t}dt=(1+\bar{o}(1))\frac{e^\rho-1}{\rho}V(r),$$

Из этого следует, что $V(r)\to 0\,(r\to\infty)$, если $S_1(r)$ – ограниченная функция. Вновь применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{r\to\infty}\frac{V(r)}{S_2(r)}=-\rho. \qquad (S_1(r) \text{ – ограничена}) \qquad (9)$$

Из этих равенств видно, что функции $S_1(r)$ и $S_2(r)$ особенно важны в случае $\rho = \rho(\infty) = 0$. В этом случае функции $S_1(r)$ и $V(r)$, а также функции $S_2(r)$ и $V(r)$ имеют различный рост на бесконечности.

Теорема 1. Пусть $\rho(r)$ – произвольный уточнённый порядок, E – множество из единичной сферы, пусть $h > 0$, $b > 0$. Тогда, если при $\alpha \in \left[-\frac{1}{2}, 2b\right]$ выполняется неравен-ство

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{f(r+\alpha r, E) - f(r, E)}{V(r)} \le h, \tag{10}$$

то равномерно на сегменте $[0, b]$ выполняется неравенство

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{f(r+\alpha r, E) - f(r, E)}{V(r)} \le 5h.$$

Последнее означает, что функция

$$\varepsilon(r,\alpha) = \left(\frac{f(r+\alpha r, E) - f(r, E)}{V(r)} - 5h\right)_+$$

Равномерно на сегменте $[0, b]$ стремится к нулю при $r \to \infty$.

Доказательство. Обозначим $f(r) = f(r, E)$, $r = e^x$, $1+\alpha = e^\tau$, $\varphi(x) = f(e^x)$, $\Phi(x) = V(e^x)$. В новых обозначениях неравенство (4.13) выглядит так

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\varphi(x+\tau) - \varphi(x)}{\Phi(x)} \le h, \qquad \tau \in [-\ln 2, \ln(1+2b)]. \tag{11}$$

Если утверждение теоремы неверно, то существуют последовательность $x_m \to \infty$ и посл-едовательность $\tau_m \in [0, \ln(1+b)]$ такие, что выполняется неравенство

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\varphi(x_m+\tau_m) - \varphi(x_m)}{\Phi(x_m)} > 5h, \tag{12}$$

Пусть $\delta \in (0, \min(\ln 2, \ln(1+2b) - \ln b))$. Обозначим

$$E_m = \{\alpha \in [0, \delta]: \ \varphi(x_k+\alpha) - \varphi(x_k) \ \le \ 2h\Phi(x_k) \ \forall k \ge m\}.$$

E_m – возрастающая последовательность измеримых множеств. Из неравенства (4.14) следует, что $\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m = [0, \delta]$. Поэтому $\lim_{m\to\infty} mes E_m = \delta$.

Далее обозначим

$$F_m = \{\beta \in [-\delta, \ln(1+b)]: \ \varphi(x_k+\tau_k) - \varphi(x_k+\tau_k-\beta) \ \le \ 2h\Phi(x_k+\tau_k-\beta) \ \forall k \ge m\}.$$

F_m – также возрастающая последовательность измеримых множеств. Из неравенства (12) следует, что $\bigcup_{m=1}^{\infty} F_m = [-\delta, \ln(1+b)]$. Поэтому $\lim_{m\to\infty} mes F_m = \ln(1+b)+\delta$.

Пусть $\delta_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\delta\right)$. Тогда существует число p_0 такое, что при $p \geq p_0$ будут выполняться неравенства $mes E_p > \delta - \delta_1$, $mes F_p > \ln(1+b)+\delta-\delta_1$.

Обозначим $F'_p = \{\tau_p\} - F_p$ (арифметическая разность множеств). Справедливы вклю-чения

$$E_p \subset [0,\delta] \subset [\tau_p - \ln(1+b), \tau_p + \delta],$$

$$F'_p \subset [\tau_p - \ln(1+b), \tau_p + \delta].$$

Оба множества E_p и E'_p являются частью сегмента $[\tau_p - \ln(1+b), \tau_p + \delta]$. Сумма мер этих множеств больше длины указанного сегмента. Поэтому пересечение этих множеств не пусто. Пусть $\alpha \in E_p \cap F'_p$. Тогда $\alpha = \tau_p - \beta$, где $\beta \in F_p$. Поэтому выполняются неравенства

$$\varphi(x_p+\alpha)-\varphi(x_p) \leq 2h\Phi(x_p),$$

$$\varphi(x_p+\tau_p)-\varphi(x_p+\tau_p-\beta) \leq 2h\Phi(x_p+\tau_p-\beta).$$

Складывая эти неравенства, и учитывая равенство $x_p+\alpha = x_p+\tau_p-\beta$, получим

$$\varphi(x_p+\tau_p)-\varphi(x_p) \leq 4h\Phi(x_p)+2h\left(\Phi(x_p+\alpha)-\Phi(x_p)\right).$$

Обозначим $r_p = e^{x_p}$. Далее находим

$$\frac{\Phi(x_p+\alpha)-\Phi(x_p)}{\Phi(x_p)} = \frac{V(e^{\alpha}r_p)-V(r_p)}{V(r_p)} \to e^{\rho\alpha}-1 \qquad (p\to\infty).$$

Так как $\alpha \in (0,\delta)$, то при достаточно малых δ и достаточно больших p будет выполнять-ся неравенство $\varphi(x_p+\tau_p)-\varphi(x_p) \leq 5h\Phi(x_p)$. Это противоречит (4.15). Теорема доказана.

Сейчас мы сформулируем условия, обеспечивающие существование предела $\lim_{R\to+\infty} \mu((r,R]\times E)$. При выполнении этих условий функцииобозначены одним символом $\mu((r,\infty)\times E)$, совпадают.

Теорема 2. Пусть $\rho(r)$ такой уточнённый порядок, что функция $S_1(r)$ ограничена. Пусть μ – мера Радона на полуоси $\mathbb{R}_0^n$ такая, что её функции $N(\alpha,E)$, $\underline{N}(\alpha,E)$, вычисленные относительно уточнённого порядка $\rho(r)$, ограничены на некотором интервале $(0,\delta)$. Тогда для любого $r>0$ существует предел

$$\lim_{R\to\infty}\mu\left(\left(r,R\right]\times E\right).$$

Доказательство. Из локальной ограниченности меры μ следует, что теорему доста-точно доказывать для случая $r\geq 1$. В дальнейшем мы будем считать, что это неравенство выполнено.

Как уже отмечалось раньше ограниченность функций $N(\alpha,E)$, $\underline{N}(\alpha,E)$ на какомнибудь интервале $(0,\delta)$ влечёт их ограниченность на любом интервале $(0,a)$. Из этого, конечно, следует, что для любого $\alpha_0>0$ величины $N(\alpha_0,E)$, $\underline{N}(\alpha_0,E)$ конечны. Из доказательства лемм 4.3 и 4.4 легко усмотреть, что существует не зависящая от r величина M такая, что при $r\geq 1$ выполняются неравенства

$$\mu\left(\left(r,tr\right]\times E\right)\ \leq\ M\int_r^{(1+\alpha_0)r}\frac{V(x)}{x}dx,\ \ t\in\left(1,1+\alpha_0\right],$$

$$\mu\left(\left(r,tr\right]\times E\right)\ \geq\ -M\int_r^{(1+\alpha_0)r}\frac{V(x)}{x}dx,\ \ t\in\left(1,1+\alpha_0\right].$$

Из этих неравенств и ограниченности функции $S_1(r)$ следует сходимость ряда

$$\sum_{m=0}^{\infty}\mu\left(\left(\left(1+\alpha_0\right)^m r,\left(1+\alpha_0\right)^{m+1}r\right]\times E\right). \tag{13}$$

Из ограниченности функций $N(\alpha,E)$, $\underline{N}(\alpha,E)$ на любом интервале $(0,a)$ следует их ограниченность на любом сегменте $[c,d]\subset(-1,\infty)$. Тогда, как следует из теоремы 1, применённой к мерам μ и $-\mu$ для любого $b>0$ существует постоянная M такая, что для любых $\alpha\in[0,b]$ и любого $r\geq 1$ выполняется неравенство

$$\left|\mu\left(\left(r,r+\alpha r\right]\times E\right)\right|\ \leq\ MV(r). \tag{14}$$

Мы уже отмечали, что из ограниченности функции $S_1(r)$ следует, что $V(r)\to 0\ (r\to\infty)$.

Список литературы

1. Kadets, V.M. (2006), A course of Functional Analysis, Kharkov National University.

2. Van Quynh Nguyen (2015), Various Types of Convergence of Sequences of Subharmonic Functions, Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom,Volume 11, Number 1, 63–74.
3. Nguyen Van Quynh, Theorem on uniform continuity of Logarithmic potential, Visnyk of science and education, Issue 5 (59), 6-10p.
4. Nguyen Van Quynh, Le Anh Thang (2021), THEOREM ON THE REPRESENTATION MEASURES "Мировая наука" №3 (48) 2021.
5. Nguyen Van Quynh, Le Anh Thang (2021), THEOREM ON A COMPACT SET IN THE SPACE OF RADON MEASURES "Мировая наука" №11 (56) 2021.