УДК 512

Сапарбаев Ю.Ш.

магистрант

Тайджыкова А.Б.

магистрант

Эсентаев С.Б.

магистрант

Тугульчиева В.С.

старший преподаватель кафедры алгебры, анализа и методики преподавания КалмГУ

Бисенгалиев Р.А.

к.ф-м.н.,доцент кафедры алгебры, анализа и методики преподавания КалмГУ

Калмыцкий государственный университет им. Б.Б. Городовикова

ОБ АЛГОРИТМЕ ДЕЛЕНИЯ С ОСТАТКОМ В КОЛЬЦЕ МНОГОЧЛЕНОВ ОТ N -ПЕРЕМЕННЫХ

Аннотация:

Как известно, кольцо многочленов $K[X]$ *от одной переменной является евклидовым кольцом, а значит для любых двух многочленов* $f(x), \mathrm{g(x)} \in \mathrm{K[X]},\ \mathrm{g(x)} \neq 0$ *найдется и притом единственная пара многочленов* $h(x), r(x) \in K[X]$, *для которых* $f(x) = g(x) \cdot h(x) + r(x)$, degr(x)<degh(x) *или* *r(x)=0. В данной статье мы рассмотрим обобщение процедуры нахождения частного*

и остатка на случай кольца $K[x_1,..,x_n]$. *Как мы увидим, в данном случае, ситуация не такая однозначная как в* $K[X]$.

Ключевые слова: *Многочлен, остаток, частное, идеал*

Рассмотрим многочлен $f, f_1,.., f_n \in K[x_1,..,x_n]$. Попробуем представить многочлен f в виде $f = a_1 f_1 + ... + a_n f_n + r$, $a_i, r \in K[x_1,..,x_n]$. Основная идея алгоритма та же, что и в случае одной переменной: мы должны занулять старший член полинома f (относительно некоторого мономиального упорядочения) , умножая некоторый f_i на подходящий моном и вычитая. Этот моном будет членом соответствующего a_i.

Теорема. Зафиксируем некоторое мономиальное упорядочение $\succ$ на $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ (например, лексикографическое упорядочение), и пусть F = $(f_1,.., f_s)$ - упорядоченный набор полиномов из $K[x_1,..,x_n]$. Тогда любой полином $f \in K[x_1,..,x_n]$ может быть записан в виде $f = a_1 f_1 + ... + a_s f_s + r$, где $a_i, r \in K[x_1,..,x_n]$ или $r = 0$ или r – есть линейная комбинация мономов (с коэффициентами из поля K) , ни один из которых не делится ни на один из старших членов $(f_1,.., f_s)$

Пример.

Пусть $f = x^2 y + xy^2 + y^2$, $f_1 = xy - 1$, $f_2 = y^2 - 1$. Разделим f на $F = (f_1, f_2)$

Решение. Будем использовать лексикографическое упорядочение $x \succ y$.

$f = x^2 y + xy^2 + y^2$	$f_1 = xy - 1$	$f_2 = y^2 - 1$	остаток
1. $f - x \cdot f_1 = xy^2 + x + y^2 = h_1$			
2. $h_1 - y \cdot f_1 = x + y^2 + y$ Старший коэффициент x не делится ни на один из			$\to x$

старших коэффициентов f_1, f_2 В этом случае отправляем этот моном в остаток			
3. $h_2 = y^2 + y$ $h_2 - f_2 = y + 1$			$\to x + y + 1$

Таким образом, получаем

$$x^2y + xy^2 + y^2 = (x+y)\mathrm{f}_1 + 1 \cdot f_2 + (x+y+1)$$

Однако, если теперь рассмотреть тот же пример, но поменять местами многочлены f_i , то получим другой остаток.

Действительно, пусть $f = x^2y + xy^2 + y^2$, $\mathrm{f}_1 = xy - 1$, $\mathrm{f}_2 = y^2 - 1$. Разделим f на $F = (f_2, f_1)$

Получим

$$f = (x+1) \cdot f_2 + x \cdot f_1 + (2x+1)$$

Итак, упорядочение полиномов $(f_1,.., f_s)$ может влиять на результат. Отметим также, что на результат также влияет и то, какое мономиальное упорядочение мы выбираем.

Таким образом, алгоритм деления, определенной теоремой является несовершенным обобщением алгоритма деления в $K[X]$. Чтобы исправить ситуацию, необходимо использовать следующее правило: при работе с полиномами $f_1,.., f_s$ следует рассматривать идеал, порожденный ими, то есть $I = (f_1,.., f_s)$. Другими словами, следует рассматривать и другие наборы полиномов, порождающие тот же идеал. В результате возникает следующая задача: существует ли для произвольного идеала I в кольце $K[x_1,.., x_n]$

порождающее множество, такое, что остаток r от деления на данное порождающее множество полиномов был бы однозначно определен. Данная задача была решена Бруно Бухбергером (род.в 1942 г.), который построил алгоритм нахождения такого базиса идеала (базисы Гребнера).

Список литературы

1. Кокс Д., Литтл Дж., О Ши Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы. М.: Мир, 2000.- 687 С.

Saparbaev Yu.Sh.

undergraduate

Taydzhikova A.B.

undergraduate

Esentaev S.B.

undergraduate

Tugulchieva V.S.

Senior Lecturer, Department of Algebra, Analysis and Teaching Methods, KalmSU

Bisengaliev R.A.

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Algebra, Analysis and Teaching Methods, KalmSU

Kalmyk State University B.B. Gorodovikova

On the division algorithm with a remainder in the ring of polynomials in n - variables

Annotation:

As is known, the ring of polynomials $K[X]$ *in one variable is a Euclidean ring, which means that for any two polynomials* $f(x), \mathrm{g(x)} \in \mathrm{K[X]},\ \mathrm{g(x)} \neq 0$ *there is also a unique pair of polynomials for which* $f(x) = g(x) \cdot h(x) + r(x),\ \mathrm{degr(x)<degh(x)}$ *or r(x)=0. In this article, we will consider a generalization of the procedure for finding the quotient and remainder to the case of a ring* $K[x_1,..,x_n]$*. As we will see, in this case, the situation is not as clear-cut as in* $K[X]$.

Keywords: Polynomial, remainder, quotient, ideal