УДК 517.518.14

**Нгуен Ван Куинь**

**Кандидат физико-математических наук, старший преподаватель**

**Факультета фундаментальной науки,**

**университет Ханой промышленности, Ha Noi, Вьетнам.**

**E-Mail: nguyenvanquynh@haui.edu.vn.**

# Оценки исключительных множеств для меры

**Аннотация:** *Теория меры играет важную роль в теории субгармонических и $\delta$-субгармонических функций. Классические свойства меры были представлены во многих монографиях, например в [1]. В статье представляется усиление варианта Азарина теоремы об компактном множестве в пространстве радоновых мер. Результаты нашей статьи позволяют несколько упростить конструкции из этих работ.*

**Ключевые слова:** *мера Хана, мера Жордана, сингулярная положительная мера, линейный непрерывный функционал, радоновая мера .*

**Nguyen Van Quynh.**

**PhD in Physics and Mathematics, Lecturer**

**Faculty of Basic Science, Hanoi University of Industry, Ha Noi, Vietnam**

**E-Mail: nguyenvanquynh@haui.edu.vn.**

# Exceptional ratings for the measurement kit

**Abstract:** *Measure theory plays an important role in the theory of subharmonic and $\delta$-subharmonic functions. The classical properties of a measure have been presented in many monographs, for example, in [1]. In the article we sharpen Azarin's variant of the theorem on a compact set in the space of Radon measures. The results of our article allow us to simplify the constructions from these articles somewhat.*

***Key words:*** *Hahn measure, Jordan measure, singular positive measure, linear continuous functional; Radon measures, compact set.*

Уточнённый порядок играет важную роль в теории роста субгармонических функции, в ряде других разделов математики.

Абсолютно непрерывная функция $\rho(r)$ на полуоси $(0,\infty)$ называется уточнённым порядком, если выполняются следующие два условия :

1) существует предел $\lim\limits_{r\to+\infty}\rho(r)=\rho(\infty)=\rho\in(-\infty,\infty)$,

2) $\lim\limits_{r\to+\infty} r\ln r\rho'(r)=0$.

В приложениях чаще всего используется не сам уточнённый порядок $\rho(r)$, а функ-ция $V(r)=r^{\rho(r)}$. Отметим следующее свойство уточнённого порядка.

**Теорема 1.** для любого $t>0$ существует предел

$$\lim_{r\to\infty}\frac{V(tr)}{V(r)}=t^{\rho},$$

и этот предел равномерный на любом сегменте $[a,b]\subset(0,\infty)$.

Если $\rho(r)$ – уточнённый порядок, то существует дифференцируемый, и даже анали-тический, уточнённый порядок $\rho_1(r)$ такой, что

$$\lim_{r\to\infty}\frac{V(r)}{V_1(r)}=1,$$

где $V_1(r)=r^{\rho_1(r)}$.

Поэтому предположение о дифференцируемости уточнённого порядка часто не ограничивает общности рассуждений. В дальнейшем мы будем предполагать, что функ-ция $\rho(r)$ является непрерывно дифференцируемой на полуоси $(0,\infty)$.

Рост произвольной функции $f(r)$ сравнивается с ростом функции вида $V(r)$.

Множество функций вида $V(r)$ – это более широкое множество, чем множество степеней $r^{\alpha}$, $\alpha\in(-\infty,\infty)$, или множество функций вида $r^{\alpha_0}(\ln r)^{\alpha_1}(\ln_2 r)^{\alpha_2}\dots(\ln_k r)^{\alpha_k}$, где $\alpha_m$ – вещественные числа, а $\ln_m r$ – это $m$-тая итерация логарифма. Например, $\ln_2 r=\ln\ln r$.

Пусть $f(r)$ – положительная функция на полуоси $(0,\infty)$. Порядком функции $f$ называется число

$$\rho=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln f(r)}{\ln r}.$$

Важность понятия уточнённого порядка в теории роста функций можно усмотреть из следующей теоремы.

Положительная на полуоси $(0,\infty)$ функция $f(r)$ называется регулярно меняющейся в смысле Караматы, если для любого $\lambda>0$ существует конечный предел

$$\lim_{r\to\infty}\frac{f(\lambda r)}{f(r)}.$$

Пусть $\rho(t)$ – некоторый уточнённый порядок. На пространстве $R_C$ определяется одно-параметрическое семейство преобразований Азарина $A_t: R_C\to R_C$, $t\in(0,\infty)$, согласно формулам

$$\mu_t=A_t\mu,\mu_t(E)=\frac{\mu(tE)}{V(t)},$$

Для любого борелевского множества $E$.

Пусть $\varphi\in\Phi\left(R_0^n\right)$. Формула переменных даёт

$$\int_{R_0^n}\varphi(x)d\,\mu_t(x)=\frac{1}{V(t)}\int_{R_0^n}\varphi\left(\frac{x}{t}\right)d\mu(t).(4.1)$$

В этом разделе излагаются технические результаты, которые используются в следующем разделе.

Мы начнём с построения и оценок исключительного множества для меры.

Пусть $\rho(r)-¿$уточнённый порядок, $\mu-¿$положительная мера на $R_0^n$, $\eta-¿$ фиксир-ованное строго положительное число. Обозначим через $E_\eta$ множество тех точек, $\|x\|\geq 2$, для которых существует число $\alpha\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$ такое, что

$$\mu¿$$

Множество $E_\eta$ мы будем называть исключительным для меры $\mu$. Это название оправдывается тем, что при $x\notin E_\eta, x\neq 0$, и $\alpha\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$ выполняется неравенство

$$\mu¿$$

Покажем, что для каждого $x\in E_\eta$ существует наибольшее из чисел $\alpha\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$, для которого выполняется неравенство (5.1). Пусть $A(x)-¿$ множество тех чисел $\alpha\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$, для которых выполняются неравенство (5.1),

$\alpha_x = ^{A(x)}¿$, тогда существует последователь-ность $\beta_m$такая, что $\beta_m \in (0,\alpha_x] \cap A(x)$, $\lim_{m\to\infty} \beta_m = \alpha_x$. Имеем

$$\mu ¿$$

Это означает, что $\alpha_x \in A(x)$ и нужное нам утверждение доказано.

Заметим, что если $\alpha_x < \frac{1}{2}$, то в неравенстве (5.1) будет иметь место знак равенства.

Обозначим

$$G_\eta = ¿ x \in E_\eta C(x, \alpha_x \|x\|).$$

Очевидно, что $E_\eta \subset G_\eta$ и что $G_\eta - ¿$открытое множество. Поэтому представляется в виде не более, чем счётного объединения связных компонент.

$$G_\eta = ¿ i\, G_i.$$

Набор открытых шаров $C_1, \ldots, C_m$, $m \geq 1$, назовём цепочкой, если пересекаются замыкания соседних шаров и только они. Кроме того, если $x \in C_1$, $y \in C_m$, то говорим, что цепочка соединяет точки $x$ и $y$.

**Теорема 2.** Если точки $x$ и $y$ лежат в одной компоненте $G_i$ множества $G_\eta$ , то эти точки можно соединить цепочкой шаров вида $C(x_s, \alpha_s \|x_s\|)$, $s = 1, 2, \ldots, m$ , где $x_s \in E_\eta \cap G_i$ .

*Доказательство.*Пусть $H - ¿$множество точек, которые можно соединить цепочкой шаров указанного выше вида с фиксированной $x \in G_i$. Очевидно, что $H - ¿$открытное множество. Докажем, что $H - ¿$замкнутое множество в относительной топологии компоненты $G_i$. Пусть $y \in G_i$ является предельной для точек $y_m \in H$, и пусть $y \in C(h, \alpha_h \|h\|) \stackrel{\text{def}}{=} C$, где $h \in E_\eta$. Тогда $y_m \in C$ при $m \geq m_0$. Пусть цепочка шаров $C_s = C(y_s, \alpha_{y_s} \|y_s\|)$, $s = 1, \ldots, m$, соединяющие точки $y$ и $y_{m_0}$ и присоединим к ней шар $C$. Пусть $k_0 \leq m - ¿$ это наименьшее $s$ такое, что замыкания шар $C$ и $C_s$ пересекаются. Тогда цепочка шаров $C, C_1, \ldots, C_{k_0}$ соединяет точки $x$ и $y$. Таким образом, $y \in H$ и $H$ является замкнутым в$G_i$ и поэтому $H = G_i$. Лемма доказана.

Далее обозначим

$$E_{\eta,k} = \left\{ x \in E_\eta : \alpha_x \geq \frac{1}{k} \right\}.$$

Легко видеть, что множество $E_{\eta,k} - ¿$замкнутое и что

$$E_\eta = ¿ k = 1 ¿ \infty E_{\eta,k}.$$

Таким образом, $E_\eta$ является множеством типа $F_\sigma$ (счётным объединением замкнутых множеств) и, тем более, борелевским множеством.

В следующей лемме приводится оценка исключительного множества для меры.

**Теорема 3.** Пусть $\rho(r) - ¿$уточнённый порядок, $\mu - ¿$положительная мера из класса $M_\infty(\rho(r))$ и пусть $G_\eta - ¿$ множество построено указанным выше. Тогда существуют система шаров$C_s \coloneqq C(x_s, \alpha_s \|x_s\|)$, где $x_s \in G_\eta$, $\alpha_s \coloneqq \alpha_{x_s}$, покрывающая множество $G_\eta$ и величина $M$ такая, что для любых $r \geq 1$ и $\eta > 0$выполняется неравенство

$$\sum_{\|x_s\| \leq r} \left(\alpha_s \|x_s\|\right)^{n-1} < M\eta r^{n-1}.$$

*Доказательство.* Пусть $G_i - ¿$ связная компонента множества $G_\eta$, и пусть $x, y \in G_i$. По лемме 5.1 существует цепочка шаров $C_s = C\left(x_s, \alpha_s \|x_s\|\right)$, $s = 1,2,\ldots,m$, соединяющая точки $x$ и $y$. Пусть $x \in C_1, y \in C_m$. Если существует $s_1 \in \{1,2,\ldots,m\}$ такое, что $C_{s_1} \cap C\left(x, \frac{1}{2}\|x\|\right) = \varnothing$, то вводим новую$y \in G_i \cap S\left(x, \frac{1}{2}\|x\|\right) \cap C_{m_1}$, где $m_1 := min\{1,\ldots,m\}$такое, что$C_{m_1} \cap S\left(x, \frac{1}{2}\|x\|\right) \neq \varnothing$ . Тогда

$$\|x - y\| \leq 2\sum_{s=1}^{m_1} \alpha_s \|x_s\|$$

Из сказанного выше для любого $s = 1,2,\ldots,m_1$ имеем следующие соотношения

$$\|x_s\| \leq \|x\| + \frac{1}{2}\|x\| + \alpha_s \|x_s\|, \|x_s\| \leq \frac{3}{2(1-\alpha_s)}\|x\| \leq 3\|x\|,$$

$$\frac{3}{2}\|x\| + 2\alpha_s \|x_s\| \leq \frac{9}{2}\|x\|.$$

Аналогично

$$\|x_s\| \geq \|x\| - \frac{1}{2}\|x\| - \alpha_s \|x_s\|, \|x_s\| \geq \frac{1}{2(1+\alpha_s)}\|x\| \geq \frac{1}{3}\|x\|,$$

$$(1-\alpha_s)\|x_s\| \geq \frac{1}{6}\|x\|.$$

Поэтому

$$\|x - y\| \leq 6R\sum_{s=1}^{m_1} \alpha_s \leq 6R\eta^{\frac{1}{n-1}} \sum_{s=1}^{m_1} ¿¿¿$$

$$\leq 6M_1 R\eta^{\frac{1}{n-1}} \left(\frac{1}{V(R)}\right)^{\frac{1}{n-1}} \sum_{s=1}^{m_1} ¿¿¿$$

где $R = \|x\|, \mu ¿$.

Из (2.3) следует, что

$$M_1 := ¿ \underset{\frac{1}{3}R \leq t \leq 3R}{\overset{R \geq 1}{}} \frac{V(R)}{V(t)} < \infty.$$

Так как система шаров $C\left(x_s, \alpha_s \|x_s\|\right)$ образует цепочку, то каждая точка пространства покрывается не более чем двумя шарами вида $B\left(x_s, \alpha_s \|x_s\|\right)$. Учитывая это, находим, что

$$\|x-y\| \le 12 m_1 M_1 R \eta^{\frac{1}{n-1}} \left( \frac{\mu\left(\left[\frac{1}{6}R, \frac{9}{2}R\right] \times S_{n-1}\right)}{V(R)} \right)^{\frac{1}{n-1}} \le 12 m_1 M_1 M_2 R \eta^{\frac{1}{n-1}},$$

$$M_2 := ¿\, R \ge 1 \left( \frac{\mu\left(\left[\frac{1}{6}R, \frac{9}{2}R\right] \times S_{n-1}\right)}{V(R)} \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Из условия $\mu \in M_\infty(\rho(r))$ следует, что $M_2 < \infty$. Если $\eta < \left(\frac{1}{24 m_1 M_1 M_2}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \eta_1$, то равенство $\|x-y\| = \frac{1}{2}\|x\|$ невозможно. Тогда из полученного неравенства следует, что при $\eta < \eta_1$ каждая компонента множества $G_\eta$ ограничена.

Теперь применяем теорему Безиковича:

“Пусть $A - ¿$ ограниченное множество в $R^n$ и пусть для каждого $x \in A$ задан замкнутый шар $B(x, r(x)), r(x) > 0$. Тогда из указанной системы шаров можно выделить последова-тельность шаров, покрывающих $A$ и имеющих кратность не выше $\theta_n$.”

Заметим, что число $\theta_n$ зависит только от $R^n$. Тогда существует система шаров $C(x_s, \alpha_s r_s), r_s = \|x_s\|$ такая, что $G_\eta \subset \bigcup_{s=1}^{\omega} C(x_s, \alpha_s r_s), r_s = \|x_s\|$. Далее пишем

$$B(R) = \sum_{r \le r_s \le 2r} (\alpha_s r_s)^{n-1} \le (2r)^{n-1} \eta \sum_{r \le r_s \le r} \frac{\mu(C(x_s, \alpha_s r_s))}{V(r_s)}.$$

Заметим, что

$$r \le r_s \le 2r, r_s + \alpha_s r_s \le 2(1+\alpha_s) r \le 3r, r_s - \alpha_s r_s \ge (1-\alpha_s) r \ge \frac{1}{2} r.$$

Поэтому

$$B(R) \le M_3 (2r)^{n-1} \eta \frac{1}{V(r)} \sum_{r_s \in [r, 2r]} \mu(C(x_s, \alpha_s r_s))$$

$$\le \theta_n M_3 (2r)^{n-1} \eta \frac{\mu\left(\left[\frac{1}{3}r, 6r\right] \times S_{n-1}\right)}{V(r)} \le \theta_n M_3 M_4 \eta (2r)^{n-1},$$

где

$$M_3 := ¿ \begin{matrix} r \ge 1 \\ \frac{1}{2} r \le t \le 2r \end{matrix} \frac{V(r)}{V(t)}, M_4 := ¿\, r \ge 1 \frac{\mu\left(\left[\frac{1}{3}r, 6r\right] \times S_{n-1}\right)}{V(r)}.$$

Из полученной оценки следует, что

$$\sum_{r_s\in[r,2r]}\left(\alpha_s r_s\right)^{n-1} \leq \sum_{r_s\in[0,r]}\left(\alpha_s r_s\right)^{n-1} + \theta_n 2^{n-1} M_3 M_4 \eta r^{n-1} \quad (5.3)$$

Пусть теперь

$$\gamma = \text{¿} r > 0 \frac{1}{r^{n-1}} \sum_{r_s\in[0,r]}\left(\alpha_s r_s\right)^{n-1}.$$

Тогда неравенство (5.3) даёт

$$\gamma \leq \frac{1}{2}\gamma + 2^{n-2}\theta_n M_3 M_4 \eta, \gamma \leq 2^{n-1}\theta_n M_3 M_4 \eta.$$

Отсюда получаем утверждение леммы при $\eta \leq \eta_1$. В общем случае в качестве $M$ можно взять $max\left(\theta_n 2^{n-1} M_3 M_4, \frac{1}{\eta_1}\right)$. Теорема доказана.

***Список литературы***


1. Kadets, V.M. (2006), A course of Functional Analysis, Kharkov National University.
2. Van Quynh Nguyen (2015), Various Types of Convergence of Sequences of Subharmonic Functions, Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom,Volume 11, Number 1, 63–74.
3. Nguyen Van Quynh, Theorem on uniform continuity of Logarithmic potential, Visnyk of science and education, Issue 5 (59), 6-10p.
4. Nguyen Van Quynh, Le Anh Thang (2021), THEOREM ON THE REPRESENTATION MEASURES "Мировая наука" №3 (48) 2021.
5. Nguyen Van Quynh, Le Anh Thang (2021), THEOREM ON A COMPACT SET IN THE SPACE OF RADON MEASURES "Мировая наука" №11 (56) 2021.