УДК 517.518.14

Нгуен Ван Куинь
Кандидат физико-математических наук, старший преподаватель
Факультета фундаментальной науки,
университет Ханой промышленности, Ha Noi, Вьетнам.
E-Mail: nguyenvanquynh@haui.edu.vn.
Нгуен Ван Мань
Магистр математических наук, старший преподаватель
Факультета фундаментальной науки, университет Ханой промышленности,
Ha Noi, Вьетнам.
E-Mail: nvmanhhhn@haui.edu.vn.

ОБ ГЛОБАЛНЫХ СВОЙСТВАХ УТОЧНЁННОГО ПОРЯДКА

Анотация: Уточнённый порядок играет важную роль в теории субгармонических и δ-субгармонических функций. Классические свойства были представлены во многих монографиях, например в [1]. Отметим, что с помощью уточнённого порядка А.Ф. Гришин изучил рост субгармонических и δ-субгармонических функций на бесконечности. В статье предлагается усиление варианта Гришина теоремы о свойствах уточнённого порядка. Результат нашей статьи позволяет несколько упростить конструкции из доказательства нескольких утверждений.

Ключевые слова: Уточнённый порядок, равномерная непрерывность, абсолютно непрерывная функция.

Nguyen Van Quynh.
PhD in Physics and Mathematics, Lecturer
Faculty of Basic Science, Hanoi University of Industry, Ha Noi, Vietnam

E-Mail: nguyenvanquynh@haui.edu.vn.

Nguyen Van Manh.

Master of Mathematical Sciences, Lecturer

Faculty of Basic Science, Hanoi University of Industry, Ha Noi, Vietnam.

E-Mail: nvmanhhhn@haui.edu.vn.

ABOUT GLOBAL PROPERTIES OF PROXIMATE ORDER

Abstact: Proximate orde is important in the theory of subharmonic and δ-subharmonic functions. Classical properties were presented in many monographs, for example in [1]. Note that using the proximate order of A.F. Grishin studied the growth of subharmonic and δ-subharmonic functions at infinity. In the article we sharpen Grishin's variant of the property theorems of proximate order. The result of this paper allows us to somewhat simplify the constructions from the proof of several assertions.

Key words: Proximate orde, uniform continuity, absolutely continuous function.

Уточнённый порядок играет важную роль в теории роста субгармонических функции, в ряде других разделов математики.

Абсолютно непрерывная функция $\rho(r)$ на полуоси $(0,\infty)$ называется уточнённым порядком в смысле Валирона, если выполняются следующие два условия :

1) существует предел $\lim\limits_{r\to\infty}\rho(r)=\rho(\infty)=\rho\in(-\infty,+\infty),(1)$

2) $\lim\limits_{r\to\infty} r\ln r\,\rho'(r)=0.(2)$

В приложениях чаще всего используется не сам уточнённый порядок $\rho(r)$, а функция $V(r)=r^{\rho(r)}$. Отметим следующее свойство уточнённого порядка.

Отметим следующее свойство уточнённым порядком (см., пример [1])

Теорема 1. Для любого $t>0$ существует предел

$$\lim_{r\to\infty}\frac{V(tr)}{V(r)}=t^{\rho},(3)$$

и этот предел равномерный на любом сегменте $[a,b]\subset(0,\infty)$.

Если $\rho(r)$ – уточнённый порядок, то существует дифференцируемый, и даже аналитический, уточнённый порядок $\rho_1(r)$ такой, что

$$\lim_{r\to\infty}\frac{V(r)}{V_1(r)}=1,$$

где $V_1(r)=r^{\rho_1(r)}$.

Поэтому предположение о дифференцируемости уточнённого порядка часто не ограничивает общности рассуждений. В дальнейшем мы будем предполагать, что функция $\rho(r)$ является непрерывно дифференцируемой на полуоси $(0,\infty)$.

Далее будет исследована функция $\gamma(t)$, о которой уже говорилось в анатоции.

Терема 2. Пусть $\rho(r)$ – нулевой уточнённый порядок ($\rho(r)\to 0, r\to\infty$), удовлетворяющий условию $\rho\left(\frac{1}{r}\right)=-\rho(r)$ и пусть

$$\gamma(t)=¿\,r>0\,\frac{V(rt)}{V(r)},\underline{\gamma}(t)=\inf_{r>0}\frac{V(rt)}{V(r)}.$$

Тогда справеднливы следующие утверждения:

1) $\gamma(t),\underline{\gamma}(t)\in(0;\infty);$
2) $\gamma(t)>\underline{\gamma}(t),\underline{\gamma}(1)=\gamma(1)=1;$
3) $\gamma\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{\underline{\gamma}(t)};$
4) $\gamma(t_1t_2)\le\gamma(t_1)\gamma(t_2),\gamma(t_1t_2)\ge\underline{\gamma}(t_1)\underline{\gamma}(t_2);$
5) $\gamma(t)\ge V(t),\underline{\gamma}(t)\le V(t);$

6) Функции $\gamma(t)$ и $\underline{\gamma}(t)$ являются непрерывными функциями на полуоси $(0,\infty)$.

Обычно уточнённый порядок $\rho(r)$ применяют для исследования асимптотического поведения функций $f(r)$ по направлению $r\to\infty$. В этом случае поведение функции $\rho(r)$ в окрестности нуля не играет никакой роли. Однако, в некоторых вопросах поведение $\rho(r)$ в окрестности нуля также важно. Удобным, является условие: $\rho(r)$ удовлетворяет равенству $\rho\left(\frac{1}{r}\right)=-\rho(r)$, или, что то же самое, $V(r)=V\left(\frac{1}{r}\right)$. Принятие таких ограничений позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 2. Пусть $\rho(r)$ – нулевой уточнённый порядок ($\rho(r)\to 0, r\to\infty$), удовлетворяющий условию $\rho\left(\frac{1}{r}\right)=-\rho(r)$ и пусть $\gamma(t)=¿r>0\frac{V(rt)}{V(r)}$.

Тогда $\gamma(t)$ – непрерывная функция на полуоси $(0,\infty)$ и выполняются соотношения

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\ln\gamma(t)}{\ln t}=0,\ \lim_{t\to+0}\frac{\ln\gamma(t)}{\ln\frac{1}{t}}=0.$$

Отметим, что в случае если $\rho(r)=\rho+\hat{\rho}(r)$, где уточнённый порядок $\hat{\rho}(r)$ удовлетворяет условию теоремы 1 получаем глобальное неравенство

$$V(rt)\le t^{\rho}\gamma(t)V(r), (r,t)\in(0,\infty). \quad (5)$$

Использование этого неравенства позволяет упростить доказательство ряда известных утверждений.

Теорема 3. Пусть $\rho(r)$ – произвольный уточнённый порядок, E – множество из единичной сферы, пусть $h>0$, $b>0$. Тогда, если при $\alpha\in\left[-\frac{1}{2},2b\right]$ выполняется неравен-ство

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{f(r+\alpha r,E)-f(r,E)}{V(r)}\le h, \qquad (6)$$

то равномерно на сегменте $[0,b]$ выполняется неравенство

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{f(r+\alpha r,E)-f(r,E)}{V(r)}\le 5h.$$

Последнее означает, что функция

$$\varepsilon(r,\alpha)=\left(\frac{f(r+\alpha r,E)-f(r,E)}{V(r)}-5h\right)_{-}$$

Равномерно на сегменте $[0,b]$ стремится к нулю при $r\to\infty$.

Доказательство. Обозначим $f(r)=f(r,E)$, $r=e^x$, $1+\alpha=e^\tau$, $\varphi(x)=f(e^x)$, $\Phi(x)=V(e^x)$. В новых обозначениях неравенство (4.13) выглядит так

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\varphi(x+\tau)-\varphi(x)}{\Phi(x)}\le h, \qquad \tau\in[-\ln 2,\ln(1+2b)]. \qquad (7)$$

Если утверждение теоремы неверно, то существуют последовательность $x_m\to\infty$ и посл-едовательность $\tau_m\in[0,\ln(1+b)]$ такие, что выполняется неравенство

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\varphi(x_m+\tau_m)-\varphi(x_m)}{\Phi(x_m)}>5h, \qquad (8)$$

Пусть $\delta\in(0,\min(\ln 2,\ln(1+2b)-\ln b))$. Обозначим

$$E_m=\{\alpha\in[0,\delta]:\ \varphi(x_k+\alpha)-\varphi(x_k)\ \le\ 2h\Phi(x_k)\ \forall k\ge m\}.$$

E_m – возрастающая последовательность измеримых множеств. Из неравенства (4.14) следует, что $\bigcup_{m=1}^{\infty}E_m=[0,\delta]$. Поэтому $\lim_{m\to\infty} mesE_m=\delta$.

Далее обозначим

$$F_m = \left\{ \beta \in \left[-\delta, \ln\left(1+b\right)\right]: \ \varphi\left(x_k+\tau_k\right) - \varphi\left(x_k+\tau_k-\beta\right) \ \le \ 2h\Phi\left(x_k+\tau_k-\beta\right) \ \ \forall k \ge m \right\}.$$

F_m – также возрастающая последовательность измеримых множеств. Из неравенства (4.14) следует, что $\bigcup_{m=1}^{\infty} F_m = \left[-\delta, \ln\left(1+b\right)\right]$. Поэтому $\lim\limits_{m\to\infty} mes\mathrm{F}_m = \ln\left(1+b\right)+\delta$.

Пусть $\delta_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\delta\right)$. Тогда существует число p_0 такое, что при $p \ge p_0$ будут выпо-лняться неравенства $mesE_p > \delta - \delta_1$, $mesF_p > \ln\left(1+b\right)+\delta-\delta_1$.

Обозначим $F'_p = \left\{\tau_p\right\} - F_p$ (арифметическая разность множеств). Справедливы вклю-чения

$$E_p \subset \left[0, \delta\right] \subset \left[\tau_p - \ln\left(1+b\right), \tau_p+\delta\right],$$

$$F'_p \subset \left[\tau_p - \ln\left(1+b\right), \tau_p+\delta\right].$$

Оба множества E_p и E'_p являются частью сегмента $\left[\tau_p - \ln\left(1+b\right), \tau_p+\delta\right]$. Сумма мер этих множеств больше длины указанного сегмента. Поэтому пересечение этих множеств не пусто. Пусть $\alpha \in E_p \cap F'_p$. Тогда $\alpha = \tau_p - \beta$, где $\beta \in F_p$. Поэтому выполняются нерав-енства

$$\varphi\left(x_p+\alpha\right) - \varphi\left(x_p\right) \ \le \ 2h\Phi\left(x_p\right),$$

$$\varphi\left(x_p+\tau_p\right) - \varphi\left(x_p+\tau_p-\beta\right) \ \le \ 2h\Phi\left(x_p+\tau_p-\beta\right).$$

Складывая эти неравенства, и учитывая равенство $x_p+\alpha = x_p+\tau_p-\beta$, получим

$$\varphi\left(x_p+\tau_p\right) - \varphi\left(x_p\right) \ \le \ 4h\Phi\left(x_p\right) + 2h\left(\Phi\left(x_p+\alpha\right) - \Phi\left(x_p\right)\right).$$

Обозначим $r_p = e^{x_p}$. Далее находим

$$\frac{\Phi(x_p+\alpha)-\Phi(x_p)}{\Phi(x_p)}=\frac{V(e^{\alpha}r_p)-V(r_p)}{V(r_p)}\to e^{\rho\alpha}-1 \qquad (p\to\infty).$$

Так как $\alpha\in(0,\delta)$, то при достаточно малых δ и достаточно больших p будет выполнять-ся неравенство $\varphi(x_p+\tau_p)-\varphi(x_p)\le 5h\Phi(x_p)$. Это противоречит (6). Теорема доказана.

В леммах 1, где встречается функция $\mu([r,\infty)\times E)$, она определяется различным образом. Сейчас мы сформулируем условия, обеспечивающие существование предела $\lim\limits_{R\to+\infty}\mu((r,R]\times E)$. При выполнении этих условий функции, которые в леммах 1 обозначены одним символом $\mu((r,\infty)\times E)$, совпадают.

Список литературы

1. *Левин Б.Я.,* 1956, Распределение корней целых функций, ГИТТЛ, Москва.
2. *Гришин А.Ф., Малютина Т.И.,* 1998, Об уточнённом порядке, Комплекс-ный анализ и математическая физика, Красноярск, с.10-24.