УДК 517.518.14

Нгуен Ван Куинь

Кандидат физико-математических наук, старший преподаватель

Факультета фундаментальной науки,

университет Ханой промышленности, Ha Noi, Вьетнам.

E-Mail: nguyenvanquynh@haui.edu.vn.

Критерий компактности в пространстве комплексних борелевских мер

Аннотация: *Теория меры играет важную роль в теории субгармонических и δ-субгармонических функций. Классические свойства меры были представлены во многих монографиях, например в [1]. В статье представляется усиление варианта Азарина теоремы об предельных множеств радоновых мер. Результаты нашей статьи позволяют несколько упростить конструкции из этих работ.*

Ключевые слова: *мера Хана, мера Жордана, сингулярная положительная мера, линейный непрерывный функционал, радоновая мера .*

Nguyen Van Quynh.

PhD in Physics and Mathematics, Lecturer

Faculty of Basic Science, Hanoi University of Industry, Ha Noi, Vietnam

E-Mail: nguyenvanquynh@haui.edu.vn.

Compactness criterion in the space of complex Borel measures

Abstract: *Measure theory plays an important role in the theory of subharmonic and δ-subharmonic functions. The classical properties of a measure have been presented in many monographs, for example, in [1]. In the article we sharpen Azarin's variant of the theorem on limit sets in the space of Radon measures. The* *results of our article allow us to simplify the constructions from these articles somewhat.*

Key words: *Hahn measure, Jordan measure, singular positive measure, linear continuous functional; Radon measures, compact set.*

Сначала вводим некоторые обозначения:

$R_0^n = R^n \setminus \{0\}$; $C(z_0, r) = \{z : \|z - z_0\| < r\}$; $B(z_0, r) = \{z : \|z - z_0\| \le r\}$.

Φ–это линейное пространство непрерывных финитных функций на R_0^n. В пространстве Φ вводится понятие сходимости. Последовательность функций $f_n \in \Phi$ сходится к функ-ции f в пространстве Φ, если f_n– равномерно финитны и последовательность f_n равномерно сходится к f на R_0^n. То есть существует компакт $B(0,r_1)$¿$(0,r_2)$, $r_1>r_2$ такой, что supp$f_n \subset B(0,r_1)$¿$(0,r_2)$ и последовательность f_n равномерно сходится к f на R_0^n.

Напомним теперь некоторые определения и результаты из теории интеграла и меры.

Пусть в R_0^n определена вещественная борелевская мера μ, $E \subset R_0^n$ – борелевское множество. Ограничением(сужением) меры μ на множество E называется мера μ_E, которая определяется формулой $\mu_E(A) = \mu(A \cap E)$ для любого борелевского множества $A \subset R_0^n$.

Если $\mu_E = \mu$, то говорим, что мера μ сосредоточена на множестве E.

Носителем меры μ (обозначение suppμ) называется наименьшее замкнутое множество, на котором сосредоточена мера.

Меры μ_1 и μ_2 называются взаимно сингулярным, если они сосредоточены на непересекающихся борелевских множествах E_1 и E_2.

Сформулируем следующие известные теоремы,

Теорема Жордана. Всякая вещественная мера однозначно представляется в виде $\mu = \mu_+ - \mu_-$, где μ_+ и μ_- – взаимно сингулярные положительные меры.

Мера μ_+ называется положительной составляющей меры μ.

Мера μ_- называется отрицательной составляющей меры μ.

Теорема Хана. Для любой вещественной меры μ в области G существует разложение G на два непересекающихся множества G_1 и G_2, причем

$\mu(E) \ge 0$ при $E \subset G_1$

$\mu(E) \le 0$ при $E \subset G_2$

Хотя разложение $G = G_1 \cup G_2$ не единственно, но меры μ_+ и μ_- определяемые формулами $\mu_+(E) = \mu(E \cap G_1)$, $\mu_-(E) = \mu(E \cap G_2)$ не зависят от выбора G_1 и G_2.

Из этих теорем следует, что если μ – вещественная борелевская мера на R_0^n, то существует борелевские множества E_1 и E_2 такие, что

1) $R_0^n = E_1 \cup E_2$,
2) $E_1 \cap E_2 = \varnothing$,
3) $\mu_+ = \mu_{E_1}, \mu_- = \mu_{E_2}$.

Величина $|\mu| = \mu_+ + \mu_-$ называется полной вариацией или модулем меры μ.

Вещественная борелевская мера μ на R_0^n называется локально конечной, если для любого компакт $K \subset R_0^n$ выполняется неравенство $|\mu|(K) < \infty$.

Комплексной борелевской мерой называется функция множеств $\mu(E)$, представляемая в виде $\mu(E) = \mu_1(E) + i\mu_2(E)$, где μ_1, μ_2 – конечные вещественные борелевские меры.

Обозначим через M_1 семейство функций множеств , представимых в виде $\mu = \mu_1 - \mu_2$, где μ_1, μ_2 вещественные локально конечные борелевские меры на R_0^n. функция μ определена на борелевских множествах $E \subset R_0^n$ за исключением тех E, для которых $\mu_1(E) = \mu_2(E) = \pm\infty$. В частности функция μ будет определена и счётно аддитивна на всех борелевских множествах с компактным в R_0^n замыканием.

Две меры $\mu, \nu \in \mathrm{M}_1$ называются эквивалентными, если выполняется равенство $\mu(E) = \nu(E)$ для любых борелевских множеств E, указанного выше вида.

Теорема 1. СМ [5] Всякий элемент $\mu \in \mathrm{M}_1$ эквивалентен разности $\mu_1 - \mu_2$, где где μ_1 и μ_2 – положительные взаимно сингулярные локально конечные борелевские меры на R_0^n. Причем μ_1 и μ_2 определяются однозначно.

Теорема 2. СМ[6] Всякая широко ограниченное множество в $\Re_C$ является сильно огранич-енным множеством.

Теорема 3 (критерий компактности в $\Re_C$). Для того, чтобы множество $H \subset \Re_C$ было компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было широко ограниченным.

Доказательство. Необходимость. Докажем от противного. Пусть $H \subset \Re_C$ – компактное множество. Допустим, что оно не является широко ограниченным. Тогда существует функция $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}_0^n)$ и последовательность $\mu_m \in H$ такие, что выполняется неравенство $|(\mu_m, \phi)| \geq m$. Но у последовательности μ_m есть сходящаяся подпоследовательность. Получили противоречие. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $H \subset \Re_C$ – широко ограниченное множество. По теореме 2 оно является сильным ограниченным. Это означает, что для любого $m \geq 2$ существует конст-анта M_m такая, что $|\mu|\left(B(0,m) \setminus C\left(0,\frac{1}{m}\right)\right) \leq M_m$ для любой меры $\mu \in H$. Пусть μ_p произвольная последовательность мер из H. По теореме Алаоглу у последовательности μ_p есть подпоследовательность $\mu_p^{(1)}$, которая слабо сходится к некоторой мере ν_2 на компакте $B(0,2)¿\left(0,\frac{1}{2}\right)$. Из метода математической индукции следует, что существует последовательность $\mu_p^{(k)}$, $k=2,3,\ldots,$ такая, что последовательность $\mu_p^{(k+1)}$ является подпоследовательностью последовательности $\mu_p^{(k)}$ и последовательность $\mu_p^{(k)}$ слабо сходится к некоторой мере ν_k на компакте $B(0,k)¿\left(0,\frac{1}{k}\right)$. Можно считать, что каждая мера ν_k есть мера на R_0^n, считая ν_k равной нулю вне компакта $B(0,k)¿\left(0,\frac{1}{k}\right)$. Тогда берём диагональную последовательность $\sigma_k = \mu_k^{(k)}$, которая будет слабо сходиться к мере ν_m на компакте $B(0,m)¿\left(0,\frac{1}{m}\right)$ для любого $m \geq 2$. Докажем, что ν_{m+1} и ν_{m+2} на компакте $B(0,m)¿\left(0,\frac{1}{m}\right)$ совпадают. Берём функцию ψ, которая та же функция, что и в тексте доказательства предыдущей теоремы. Тогда $\psi \in C\left(B(0,m+1)¿\left(0,\frac{1}{m+1}\right)\right)$, $\psi \in C\left(B(0,m+2)¿\left(0,\frac{1}{m+2}\right)\right)$. Поэтому

$$\lim_{k\to\infty}(\sigma_k,\psi) = \int\limits_{B(0,m)\setminus C\left(0,\frac{1}{m}\right)} \psi(x)\,d\widetilde{\nu_{m+1}}(x) = \int\limits_{R_0^n} \varphi(x)\,d\widetilde{\nu_{m+1}}(x).$$

$$\lim_{k\to\infty}(\sigma_k,\psi) = \int\limits_{R_0^n} \varphi(x)\,d\widetilde{\nu_{m+2}}(x).$$

Далее, как и в доказательстве предыдущей теоремы, получаем совпадение ограничений мер ν_{m+1} и ν_{m+2} на компакте $B(0,m)¿\left(0,\frac{1}{m}\right)$. Строим последовательность ν_m как ограничение меры ν_{k+1} на компакте $B(0,m)¿\left(0,\frac{1}{m}\right)$

и меру $\mu\in\Re_C$ такую, что для любого $m\geq 2$ ограничение μ на компакте $B(0,m)¿\left(0,\frac{1}{m}\right)$ есть v_m.

Теперь докажем, что последовательность σ_k сходится к μ. Пусть ϕ – произвольная функция из $\Phi\left(R_0^n\right)$. Существует такое n, что

$$\operatorname{supp}\phi\subset\left(B(0,m)¿\left(0,\frac{1}{m}\right)\right)\subset\left(B(0,m+1)¿\left(0,\frac{1}{m+1}\right)\right).$$

Поскольку последовательность σ_k слабо сходится к v_{k+1} на компакте $B(0,m+1)¿\left(0,\frac{1}{m+1}\right)$, то $\lim_{m\to\infty}(\sigma_k,\phi)=(v_{m+1},\phi)=(v_m,\phi)=(\mu,\phi)$. Теорема доказана.

Говорят, что сеть радоновых мер μ_r, $r\in(0,\infty)$, широко сходится к мере ν при $r\to\infty$, если для любой функции $\varphi\in\Phi\left(\mathbb{R}_0^n\right)$ выполняется равенство

$$\lim_{r\to\infty}(\mu_r,\phi)=(\nu,\phi).$$

Теорема 4. Пусть μ_r, $r\in(0,\infty)$ – сеть радоновых мер и пусть для любой функции ϕ существует предел (μ_r,ϕ) при $r\to\infty$. Тогда сеть μ_r широко сходится к некоторой мере ν
при $r\to\infty$.

Доказательство.

Пусть последовательность $t_m>0$ сходится к бесконечности. Из условия теоремы следует, что последовательность μ_{t_m} широко ограничена. По теореме 3 у последователь-ности t_m есть подпоследовательность τ_m такая, что последовательность μ_{τ_m} широко сход-ится к некоторой радоновой мере τ. Докажем, что $\mu_r\to\nu$ при $r\to\infty$. Если это не так, то существуют число $\varepsilon_0>0$, последовательность $r_m\to\infty$ и функция $\varphi\in\Phi\left(\mathbb{R}_0^n\right)$ такие , что $|(\mu_{r_m},\phi)-(\nu,\phi)|\geq\varepsilon_0$. Это неравенство противоречит соотношениям $(\mu_{\tau_m},\phi)\to(\nu,\phi)$ и $(\mu_{\tau_m}-\mu_{r_m},\phi)\to 0$. Теорема доказана.

Теорема 5. Если последовательность $\mu_m=\mu_{1,m}+i\mu_{2,m}$ комплексных радоновых мер является сходящейся, то у неё существует подпоследовательность μ_{m_1}, такая что послед-овательности $|\mu_{m_1}|$, $(\mu_{1,m_1})_\pm$, $(\mu_{2,m_1})_\pm$ будут сходящимися.

Доказательство. Из того, что последовательность μ_m сходится, следует, что она является широко ограниченной. По теореме 3.2 она будет сильно ограниченной. Значит сильно ограниченными будут последовательности $|\mu_{m_1}|$, $(\mu_{1,m_1})_\pm$, $(\mu_{2,m_1})_\pm$. Тогда по теор-еме 3.8 эти последовательности будут компактными. Из этого легко следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

Пусть μ – радонова мера, E – борелевское множество. Множество E называется измеримым по Жордану относительно меры μ, если $|\mu|(\partial E)=0$. Из теоремы $0.5'$ [5] вытекает следующее утверждение.

Список литературы

1. Kadets, V.M. (2006), A course of Functional Analysis, Kharkov National University.
2. Van Quynh Nguyen (2015), Various Types of Convergence of Sequences of Subharmonic Functions, Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom,Volume 11, Number 1, 63–74.
3. Nguyen Van Quynh, Theorem on uniform continuity of Logarithmic potential, Visnyk of science and education, Issue 5 (59), 6-10p.
4. Nguyen Van Quynh, Le Anh Thang (2021), THEOREM ON THE REPRESENTATION MEASURES "Мировая наука" №3 (48) 2021.
5. Nguyen Van Quynh, Le Anh Thang (2021), THEOREM ON A COMPACT SET IN THE SPACE OF RADON MEASURES "Мировая наука" №11 (56) 2021.
6. Nguyen Van Quynh (2023), Asymptotic properties of Azarin limit sets "Теория и практика современной науки" №12 (102) 2023.