

Давлатов Ш.О. Доцент.

Университет экономики и педагогики

Узбекистан, г. Карши

ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ САЛЕМА С ПОМОЩЬЮ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ФУНКЦИЙ.

Аннотация. В этой статье построена последовательность функций. С помощью последовательности функций исследовано интегральное уравнение Салема.

Ключевые слова. Последовательность функций, уравнения Салема, нетривиальное решение, гипотеза Римана.

Davlatov Sh.O.

University of Economic and Pedagogy

Uzbekistan, Karshi

Abstract. In this article, a sequence of functions is constructed. The integral Salem equation is investigated using a sequence of functions.

Keywords. Sequence of functions, Salem equations, nontrivial solution, Riemann hypothesis.

Теорема 1. Гипотеза Римана истинна тогда и только тогда, когда интегральное уравнение или функция от x

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\sigma y} f(y) dy}{e^{e^{x-y}} + 1} = 0 \quad (1)$$

среди ограниченных и измеримых функций имеет только тривиальное решение $f(y)$ для $0 < \sigma < 1$, $x \in R[1]$.

В интеграле (1) сделаем замену переменных $z = e^{-y}$, $\tau = e^x$; $\tau, z \in (0, +\infty)$. После замены интеграл (1) имеет вид:

$$\int_0^{+\infty} \frac{z^{\sigma-1} \phi(z) dz}{e^{\tau z} + 1} = 0 \quad (2)$$

Рассмотрим последовательность функций вида

$$\varphi_n(z) = \begin{cases} (-1)^i & \text{при } z \in \left(1 + \frac{i}{n}, 1 + \frac{i+1}{n}\right), \quad i = \overline{0, n-1} \\ 0 & \text{при остальных значениях } z. \end{cases}$$

Последовательность функций $\varphi_n(z)$ напомним виде

$$\begin{aligned} \varphi_n(z) &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \varphi_k^n(z) = \sum_{k=0}^{n_1-1} \varphi_{2k}^n(z) - \sum_{k=0}^{n_2-1} \varphi_{2k+1}^n(z) = \\ &= \varphi_n^+(z) + \varphi_n^-(z), \quad n = n_1 + n_2, \end{aligned}$$

где

$$\varphi_k^n(z) = \begin{cases} 1 & \text{при } z \in \left(1 + \frac{k}{n}, 1 + \frac{k+1}{n}\right), \\ 0 & \text{при остальных значениях } z, \end{cases}$$

$$\varphi_n^+(z) = \sum_{k=0}^{n_1-1} \varphi_{2k}^n(z), \quad \varphi_n^-(z) = - \sum_{k=0}^{n_2-1} \varphi_{2k+1}^n(z).$$

Функции $\varphi_n^+(z), \varphi_n^-(z)$ интегрируемы и

$$\begin{aligned} \int_{[1,2]} \varphi_n^+(z) dz &= \mu \{ z : \varphi_n^+(z) < c; z \in [1,2] \} = \begin{cases} 0 & \text{если } c \in (-\infty, 1], \\ \frac{\left[\frac{n}{2}\right] + 1}{n} & \text{если } c \in (1, +\infty) \text{ и } n \text{ нечетный}, \\ \frac{1}{2} & \text{если } c \in (1, +\infty) \text{ и } n \text{ четный}. \end{cases} \\ - \int_{[1,2]} \varphi_n^-(z) dz &= \mu \{ z : -\varphi_n^-(z) < c; z \in [1,2] \} = \begin{cases} 0 & \text{если } c \in (-\infty, 1], \\ \frac{\left[\frac{n}{2}\right]}{n} & \text{если } c \in (1, +\infty) \text{ и } n \text{ нечетный}. \end{cases} \end{aligned}$$

Теорема 2. Если $\nu(z)$ положительная, непрерывная, строго монотонная функция на $[1,2]$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[1,2]} \nu(z) \varphi_n^+(z) dz = \frac{1}{2} \int_{[1,2]} \nu(z) dz,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[1,2]} v(z) \varphi_n^-(z) dz = -\frac{1}{2} \int_{[1,2]} v(z) dz ,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[1,2]} v(z) \varphi_n(z) dz = 0 .$$

Доказательство. Пусть $v(z)$ положительная, непрерывная строго убывающая функция.

$$\begin{aligned} \int_1^2 v(z) \varphi_n(z) dz &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \int_{1+\frac{i}{n}}^{1+\frac{i+1}{n}} v(z) dz = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i v(\eta_i), \quad \eta_i \in (1 + \frac{i}{n}, 1 + \frac{i+1}{n}), \end{aligned}$$

где $v(\eta_i) < K = const$ по теореме Вейерштрасса. $v(z)$ строго убывающая функция, поэтому

$$v(\eta_0) > v(\eta_1) > v(\eta_2) > \dots > v(\eta_{n-1}) > 0$$

и

$$0 < \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i v(\eta_i) < v(\eta_0),$$

$$\int_1^2 v(z) \varphi_n(z) dz = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i v(\eta_i) < \frac{1}{n} v(\eta_0) < \frac{K}{n} .$$

Откуда

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^2 v(z) \varphi_n(z) dz &= 0 . \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^2 v(z) \varphi_n(z) dz &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^2 v(z) \varphi_n^+(z) dz - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^2 v(z) |\varphi_n^-(z)| dz = 0 , \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^2 v(z) \varphi_n^+(z) dz &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^2 v(z) |\varphi_n^-(z)| dz , \\ \int_1^2 v(z) dz &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^2 v(z) \varphi_n^+(z) dz + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^2 v(z) |\varphi_n^-(z)| dz = \end{aligned}$$

$$= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^2 \nu(z) \varphi_n^+(z) dz = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^2 \nu(z) \varphi_n^-(z) dz.$$

Следовательно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^2 \nu(z) \varphi_n^+(z) dz = \frac{1}{2} \int_1^2 \nu(z) dz,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^2 \nu(z) \varphi_n^-(z) dz = -\frac{1}{2} \int_1^2 \nu(z) dz.$$

Аналогично доказывается, когда $\nu(z)$ строго возрастающая функция.

Теорема доказано.

Из теоремы 2 следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{z^{\sigma-1} \varphi_n^+(z) dz}{e^{\tau z} + 1} = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{z^{\sigma-1} dz}{e^{\tau z} + 1},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{z^{\sigma-1} \varphi_n^-(z) dz}{e^{\tau z} + 1} = -\frac{1}{2} \int_1^2 \frac{z^{\sigma-1} dz}{e^{\tau z} + 1},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{z^{\sigma-1} \varphi_n(z) dz}{e^{\tau z} + 1} = 0.$$

Литературы.

1. Broughan K. Equivalents of the Riemann Hypothesis. 2018. Volume 2, Cambridge university:Press.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функции и функционального анализа. М., «Наука», 1989.