Давлатов Ш.О. Доцент.

Университет экономики и педагогики

Узбекистан, г.Карши

ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ САЛЕМА

Аннотация. В этой статье построена абстрактная интегрируемая функция. Показано, что она не является нетривиальным решением интегрального уравнения Салема.

Ключевые слова. Абстрактная функция, уравнения Салема, нетривиальное решение, гипотеза Римана.

Davlatov Sh.O.

University of Economic and Pedagogy

Uzbekistan, Karshi

Abstract. In this article, an abstract integrable function is constructed. It is shown that it is not a nontrivial solution of the Salem integral equation.

Keywords. Abstract function, Salem equations, nontrivial solution, Riemann hypothesis.

Рассмотрим следующую функцию

$$\psi(z)=\begin{cases}1 \; при \;\; иррациональных \; z\in[0,1],\\ 0 \; при \;\; рациональных \; z\in[0,1]\,.\end{cases}$$

Функцию $\psi(z)$ запишем виде суммы двух функций $\psi(z)=\psi_1(z)+\psi_2(z)$. На отрезке $[0,1]$ функция $\psi_1(z)$ имеет два значения ноль и единица. На этом отрезке при переходе слева направо каждого рационального числа значение функции $\psi_1(z)$ изменяется, то есть значения функции чередуются. На этом отрезке первым значением функции $\psi_1(z)$ является единица. Точно также на отрезке $[0,1]$ функция $\psi_2(z)$ имеет два значения ноль и единица. Значение функции $\psi_2(z)$ изменяется при переходе слева направо каждого рационального числа, то есть значения функции $\psi_2(z)$ чередуются. Первым значением функции $\psi_2(z)$ является ноль. Из интегрируемости функции $\psi(z)$ следует интегрируемость функций $\psi_1(z),\psi_2(z)$.

Теперь рассмотрим функцию $\varphi(z)=\psi_1(z)-\psi_2(z)$. Очевидно, что функция $\varphi(z)$ имеет два значения 1 и -1 на отрезке $[0,1]$. На этом отрезке, значение функции $\varphi(z)$ изменяется при переходе слева направо каждого рационального числа, то есть значения функции чередуются. Ясно, что на этом отрезке первым значением функции $\varphi(z)$ является единица. Очевидно, что функция $\varphi(z)$ интегрируема, так как функции $\psi_1(z),\psi_2(z)$ интегрируемы.

Ясно, что

$$\int_0^1 \psi(z)dz = 1.$$

Возникает вопрос чему равен следующий интеграл?

$$\int_0^1 \varphi(z)dz = ?$$

Если количество рациональных чисел на отрезки $[0,1]$ нечетное, то

$$\int_0^1 \varphi(z)dz = 0,$$

а если четное, то

$$\int_0^1 \varphi(z)dz = r_2 - r_1;\ r_2 > r_1;\ \ r_1, r_2 \in Q,$$

где r_1, r_2 соседние рациональные числа, Q - множество рациональных чисел.

Теорема. Гипотеза Римана истинна тогда и только тогда, когда интегральное уравнение или функция от x

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\sigma y} f(y)dy}{e^{e^{x-y}}+1} = 0 \tag{1}$$

среди ограниченных и измеримых функций имеет только тривиальное решение $f(y)$ для $0<\sigma<1$, $x \in R$ [1].

В интеграле (1) сделаем замену переменных $z=e^{-y}, \tau=e^{x};\ \tau, z \in (0,+\infty)$. После замены интеграл (1) имеет вид:

$$\int_0^{+\infty} \frac{z^{\sigma-1}\phi(z)dz}{e^{\tau z}+1} = 0 \tag{2}$$

Рассмотрим последовательность функций вида

$$\varphi_n(z)=\begin{cases} (-1)^i \quad при \quad z\in\left(1+\dfrac{i}{n},1+\dfrac{i+1}{n}\right), \quad i=\overline{0...n-1}, \\ 0 \quad при \ остальных \ значениях \ z. \end{cases}$$

Вычислим следующий интеграл

$$\int_0^{+\infty}\frac{z^{\sigma-1}\varphi_n(z)dz}{e^{\tau z}+1}=\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\int_{1+\frac{i}{n}}^{1+\frac{i+1}{n}}\frac{z^{\sigma-1}dz}{e^{\tau z}+1}=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i f(\eta_i,\sigma,\tau),\ \eta_i\in(1+\frac{i}{n},1+\frac{i+1}{n}),$$

где $f(\eta_i,\sigma,\tau)=\dfrac{1}{\eta_i^{1-\sigma}(e^{\tau\eta_i}+1)}<\dfrac{1}{2}$.

Очевидно, что

$$f(\eta_0,\sigma,\tau)>f(\eta_1,\sigma,\tau)>f(\eta_2,\sigma,\tau)>...>f(\eta_{n-1},\sigma,\tau)>0$$

и

$$0<\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i f(\eta_i,\sigma,\tau)<f(\eta_0,\sigma,\tau),$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{z^{\sigma-1}\varphi_n(z)dz}{e^{\tau z}+1}=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i f(\eta_i,\sigma,\tau)<\frac{1}{n}f(\eta_0,\sigma,\tau)<\frac{1}{2n}.$$

Следовательно

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{z^{\sigma-1}\varphi_n(z)dz}{e^{\tau z}+1}=0.$$

Рассмотрим множества $A_n=\left\{1+\dfrac{i}{n},\ \ i=\overline{0,n}\right\}$, $n=1,2,3,...$; $A=\lim\limits_{n\to\infty}A_n$.

Очевидно, что $A=Q\cap[1,2]$; $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\subset Q$, где Q множество рациональных чисел.

Учитывая это и сравнивая функций $\varphi_n(z)$ с функцией $\varphi(z-1)$ на отрезке $[1,2]$, вроде кажется, что функция $\varphi(z-1)$ является предельной функцией последовательности функций $\varphi_n(z)$. Но легко, убедится, что последовательность функций $\varphi_n(z)$ не сходится не по какому определению сходимости к $\varphi(z-1)$ на отрезке $[1,2]$. Поэтому

$$\int_1^2\frac{z^{\sigma-1}\varphi(z-1)dz}{e^{\tau z}+1}=?.$$

Литературы.

1. Broughan K. Equivalents of the Riemann Hypothesis. 2018. Volume 2, Cambridge university:Press.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функции и функционального анализа. М., «Наука», 1989.