УДК 519.6(075.8)

Маратова Ж.Б.

студент магистратуры

специальность «Информационные системы»

НАО «Костанайский региональный университет им.А.Байтурсынова»

Казахстан, г. Костанай

Научный руководитель: Байманкулов Абдыкарим Тунгушбаевич

Профессор,

доктор физико-математических наук

СОПРЯЖЕННАЯ ЗАДАЧА.

Аннотация: В статье приводится один из вариантов построения дифференциальной сопряженной задачи, априорные оценки решений которой будут играть существенную роль при доказательстве устойчивости метода определения коэффициента теплопроводности.

Ключевые слова: математическая модель, сопряженная задача, начальные и граничные условия.

Maratova ZH.B.

master's degree student

specialty " Information systems»

Kostanay Regional University named after A.Baitursynov

Kazakhstan, Kostanay

Scientific supervisor: Imankulov Abdykarim Tungushbaev

Professor,

doctor of physical and mathematical Sciences

INTERFACED TASK.

Abstract: the article presents one of the options for constructing a differential conjugate problem, a priori estimates of solutions of which will play a significant role in proving the stability of the method for determining the thermal conductivity coefficient.

Key words: mathematical model, conjugate problem, initial and boundary conditions.

Проблема определения теплофизических характеристик грунта исследуемого участка земли, методом неразрушающего контроля, является актуальной задачей. Численные методы решения таких задач при промерзании грунта изучены в работах Колесникова А.Г., Мартынова Г.А., Жумагулова Б.Т., Рысбайулы Б., Адамов А.А., Исмаилова А.О.

Известно, что уравнение теплопроводности грунта для зоны фазовых переходов получается аналогично как для талых грунтов. С учетом выше сказанного математическую модель можно представить в виде

$$\gamma_0 c(z,t)\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_n(z,t)\frac{\partial \theta}{\partial z}\right), \quad 0 < z < H, \ 0 \le t \le T, \tag{1}$$

$$\theta\big|_{z=0} = 0, \quad \lambda_n \frac{\partial \theta}{\partial z}\bigg|_{z=H} = -\alpha\left(\theta\big|_{z=H} - T_b(t)\right), \tag{2}$$

$$\theta\big|_{t=0} = \theta_0(z), \ 0 \le z \le H \tag{3}$$

$$\left[\lambda_n \frac{\partial \theta}{\partial z}\right]_{z=h(t)} = p\frac{dh}{dt}, \quad [\theta]_{z=h(t)} = 0, \quad p = q_0\gamma_0\, \Delta W_i, \text{ при } z = h(t), \tag{4}$$

$$\left[\lambda_n \frac{\partial \theta}{\partial z}\right]_{z=h_1(t)} = 0, \quad [\theta]_{z=h_1(t)} = 0 \ . \tag{5}$$

В задаче (1) – (5) $h(t)$ граница талой и фазовой зон, $h_1(t)$ граница фазовой и мерзлой зон, c-показатель коэффициента теплоемкости, γ - величина объемной массы, λ - выражает коэффициент теплопроводности.

Для определения коэффициента теплопроводности зон фазовых переходов разрабатывается итерационный метод, обоснование математических свойств которого приводится с использованием сопряженной задачи.

Сопряженная задача

Задавая начальное приближение $\lambda_0(z,t)$ следующее приближение $\lambda(z,t)$, определяется по формуле:

$$\lambda_{n+1}(z,t) = \lambda_n(z,t) - \beta J'(\lambda_n(z,t)), \quad n = 0,1,2...$$

Введем обозначения $\theta^n(z,t)$ и $\theta^{n+1}(z,t)$ для решений (1) – (5), соответствующие $\lambda_n(z,t)$ и $\lambda_{n+1}(z,t)$. Тогда используя соотношение

$$\theta^{n+1}(z,t) - \theta^n(z,t) = \delta\theta$$

(1) – (5) примет вид

$$\gamma_0 c(z,t)\frac{\partial \delta\theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\delta\lambda \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial z} + \lambda_n(z,t)\frac{\partial \delta\theta}{\partial z}\right), \tag{6}$$

$$\delta\theta\big|_{z=0} = 0, \left[\delta\lambda \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial z} + \lambda_n \frac{\partial \delta\theta}{\partial z}\right]\Bigg|_{z=H} = -\alpha\delta\theta\big|_{z=H}, \quad \delta\theta\big|_{t=0} = 0, \tag{7}$$

$$\left[\delta\lambda\frac{\partial\theta^{n+1}}{\partial z}+\lambda_n\frac{\partial\delta\theta}{\partial z}\right]\Bigg|_{z=h(t)}=0\,, \tag{8}$$

$$\left[\delta\lambda\frac{\partial\theta^{n+1}}{\partial z}+\lambda_n\frac{\partial\delta\theta}{\partial z}\right]\Bigg|_{z=h_1(t)}=0\,. \tag{9}$$

Здесь $\delta\lambda=\lambda_{n+1}(z,t)-\lambda_n(z,t)$.

Выражение (6) интегрируем по области Q, предварительно умножив на $\psi_n(z,t)$

$$\int_0^H\gamma_0\int_0^T c(z,t)\frac{\partial\delta\theta}{\partial t}\cdot\psi dtdz=\int_0^T\int_0^H\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_n(z,t)\frac{\partial\delta\theta}{\partial z}+\delta\lambda\frac{\partial\theta^{n+1}}{\partial z}\right)\psi dzdt\,. \tag{10}$$

Применив интегрирование по частям к правой части (10), используя начальные и граничные условия задачи и учитывая , что $[\psi]_{z=h(t)}=0$, $[\psi]_{z=h_1(t)}=0$ при предположении непрерывности функций $\psi(z,t)$ точках $h(t)$ и $h_1(t)$ придем к

$$\int_0^H\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_n(z,t)\frac{\partial\delta\theta}{\partial z}+\delta\lambda\frac{\partial\theta^{n+1}}{\partial z}\right)\psi dz=\left(\lambda_n(z,t)\frac{\partial\delta\theta}{\partial z}+\delta\lambda\frac{\partial\theta^{n+1}}{\partial z}\right)\psi\Bigg|_{z=0}^{z=H}-$$

$$-\left[\lambda_n(z,t)\frac{\partial\delta\theta}{\partial z}+\delta\lambda\frac{\partial\theta^{n+1}}{\partial z}\right]\Bigg|_{z=h(t)}\psi(h(t),t)-\left[\lambda_n(z,t)\frac{\partial\delta\theta}{\partial z}+\delta\lambda\frac{\partial\theta^{n+1}}{\partial z}\right]\Bigg|_{z=h_1(t)}\psi(h(t),t)-$$

$$-\int_0^H\left(\left(\lambda_n(z,t)\frac{\partial\delta\theta}{\partial z}+\delta\lambda\frac{\partial\theta^{n+1}}{\partial z}\right)\frac{\partial\psi}{\partial z}dz\right).$$

Теперь положив, что $\psi(z,T)=0$ и $\psi(0,t)=0$, интегрируем левую часть формулы (10) по t и с учетом внутренних граничных условий

$$-\int_0^H\int_0^T \delta\theta\gamma_0 \frac{\partial(c\psi)}{\partial t} dtdz = -\int_0^H\int_0^T \lambda_n(z,t)\frac{\partial\delta\theta}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z} dtdz -$$

$$-\int_0^T\int_0^H \delta\lambda \frac{\partial\theta^{n+1}}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z} dzdt - \alpha\int_0^T (\psi\delta\theta)\big|_{z=H} dt .$$

Применив метод интегрирования по частям к $\int_0^H \frac{\partial\delta\theta}{\partial z}\lambda_n(z,t)\frac{\partial\psi}{\partial z}dz$ по переменной z имея ввиду $[\delta\theta]_{z=h(t)}=0$, $[\delta\theta]_{z=h_1(t)}=0$, получим

$$\int_0^H \frac{\partial\delta\theta}{\partial z}\lambda_n(z,t)\frac{\partial\psi}{\partial z}dz = \delta\theta\lambda_n(z,t)\frac{\partial\psi}{\partial z}\bigg|_{z=0}^{z=H} - \left[\lambda_n\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]_{z=h(t)}\delta\theta\bigg|_{z=h(t)} -$$

$$-\left[\lambda_n\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]_{z=h_1(t)}\delta\theta\bigg|_{z=h_1(t)} - \int_0^H \delta\theta\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_n(z,t)\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)dz .$$

Если предположить, что в точках $h(t)$ и $h_1(t)$ поток $\lambda_n\frac{\partial\psi}{\partial z}$ будет непрерывным, т.е. $\left[\lambda_n\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]_{z=h(t)}=0$, $\left[\lambda_n\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]_{z=h_1(t)}=0$, то получим выражение

$$\int_0^H\int_0^T \delta\theta\left(\gamma_0\frac{\partial(c\psi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_n(z,t)\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right)dzdt = \int_0^T \delta\theta\lambda_n(z,t)\frac{\partial\psi}{\partial z}\bigg|_{z=0}^{z=H} dt +$$

$$+\int_0^T\int_0^H \delta\lambda\frac{\partial\theta^{n+1}}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}dzdt + \alpha\int_0^T(\psi\delta\theta)\big|_{z=H}dt . \quad (11)$$

Функция $\psi(z,t)$ подбирается таким образом, чтобы имели место соотношения

$$\gamma_0 \frac{\partial (c\psi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_n(z,t)\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) = 0 \qquad (12)$$

$$\lambda_n \frac{\partial \psi^n}{\partial z}\bigg|_{z=H} + \alpha\psi^n\Big|_{z=H} = -2\left(\theta^n\Big|_{z=H} - T_g(t)\right). \qquad (13)$$

С учетом принятых равенств из (11) получается соотношение

$$2\int_0^T \delta\theta\left(\theta^n - T_g(t)\right)\Big|_{z=H} dt = \int_0^T\int_0^H \delta\lambda \frac{\partial \theta^n}{\partial z}\cdot\frac{\partial \psi^n}{\partial z} dzdt + \int_0^T\int_0^H \delta\lambda \frac{\partial \delta\theta}{\partial z}\cdot\frac{\partial \psi^n}{\partial z} dzdt, \qquad (14)$$

где $\int_0^T\int_0^H \delta\lambda \frac{\partial \theta^n}{\partial z}\cdot\frac{\partial \psi^n}{\partial z} dzdt$ - малая величина 1-го порядка,

$\int_0^T\int_0^H \delta\lambda \frac{\partial \delta\theta}{\partial z}\cdot\frac{\partial \psi^n}{\partial z} dzdt$ - малая величина 2-го порядка.

В результате проведенных преобразований была получена задача начальными и граничными условиями

$$\gamma_0 \frac{\partial (c\psi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_n(z,t)\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) = 0, \qquad (15)$$

$$\psi(0,t) = 0, \ \lambda_n \frac{\partial \psi}{\partial z}\bigg|_{z=H} + \alpha\psi^n\Big|_{z=H} = -2\left(\theta^n\Big|_{z=H} - T_g(t)\right), \qquad (16)$$

$$\psi(z,T) = 0, \ \left[\lambda_n \frac{\partial \psi}{\partial z}\right]_{z=h(t)} = 0, \ \left[\lambda_n \frac{\partial \psi}{\partial z}\right]_{z=h_1(t)} = 0, \ [\psi]_{z=h(t)} = 0, \ [\psi]_{z=h_1(t)} = 0. \qquad (17)$$

Задача (15)-(17) называется сопряженной задачей (с обратным временем).

Список использованных источников

1. Нерпин С.В., Юзефович Г.И. О расчете нестационарного движения влаги в почве. // Докл. ВАСХНИЛ, №6, 1966.

2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1996, 724 с.

3. Рысбайулы Б. Идентификация коэффициента теплопроводности распространения тепла в неоднородной среде // Вестник КБТУ, 2008, №1, ст. 62-65

4. Байманкулов А.Т. Определение коэффициента диффузии почвенной воды в однородной среде.// Известия НАН РК, 2008, № 3, с.45-47.

5.Baymankulov A.T., Ismailov A. Stability and convergence of difference schemes in the problem of determining the coefficient of soil thermo gradient // III Congress of the Turkish World mathematicians. – Almaty, 2009. – P. 132-134.