

Кандидат физико-математических наук, старший преподаватель

Факультета фундаментальной науки,

университет Ханой промышленности, Ха Noi, Вьетнам.

E-Mail: nguyenvanquynh@hau.edu.vn.

Построение исключительных множеств для меры, разделяющие множества для меры

Аннотация: Теория меры играет важную роль в теории субгармонических и δ -субгармонических функций. Классические свойства меры были представлены во многих монографиях, например в [1]. В статье представляется усиление варианта Азарина теоремы об компактном множестве в пространстве радоновых мер. Результаты нашей статьи позволяют несколько упростить конструкции из этих работ.

Ключевые слова: мера Хана, мера Жордана, сингулярная положительная мера, линейный непрерывный функционал, радоновая мера .

Nguyen Van Quynh.

PhD in Physics and Mathematics, Lecturer

Faculty of Basic Science, Hanoi University of Industry, Ha Noi, Vietnam

E-Mail: nguyenvanquynh@hau.edu.vn.

Construction of exceptional sets for a measure, separating sets for a measure

Abstract: Measure theory plays an important role in the theory of subharmonic and δ -subharmonic functions. The classical properties of a measure have been presented in many monographs, for example, in [1]. In the article we sharpen Azarin's variant of the theorem on a compact set in the space of Radon measures.

The results of our article allow us to simplify the constructions from these articles somewhat.

Key words: Hahn measure, Jordan measure, singular positive measure, linear continuous functional; Radon measures, compact set.

Уточнённый порядок играет важную роль в теории роста субгармонических функции, в ряде других разделов математики.

Абсолютно непрерывная функция $\rho(r)$ на полуоси $(0, \infty)$ называется уточнённым порядком, если выполняются следующие два условия :

- 1) существует предел $\lim_{r \rightarrow +\infty} \rho(r) = \rho(\infty) = \rho \in (-\infty, \infty)$,
- 2) $\lim_{r \rightarrow +\infty} r \ln r \rho'(r) = 0$.

В приложениях чаще всего используется не сам уточнённый порядок $\rho(r)$, а функция $V(r) = r^{\rho(r)}$. Отметим следующее свойство уточнённого порядка.

Теорема 1. для любого $t > 0$ существует предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{V(tr)}{V(r)} = t^\rho,$$

и этот предел равномерный на любом сегменте $[a, b] \subset (0, \infty)$.

Если $\rho(r)$ – уточнённый порядок, то существует дифференцируемый, и даже аналитический, уточнённый порядок $\rho_1(r)$ такой, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{V(r)}{V_1(r)} = 1,$$

где $V_1(r) = r^{\rho_1(r)}$.

Поэтому предположение о дифференцируемости уточнённого порядка часто не ограничивает общности рассуждений. В дальнейшем мы будем предполагать, что функция $\rho(r)$ является непрерывно дифференцируемой на полуоси $(0, \infty)$.

Рост произвольной функции $f(r)$ сравнивается с ростом функции вида $V(r)$.

Множество функций вида $V(r)$ – это более широкое множество, чем множество степеней r^α , $\alpha \in (-\infty, \infty)$, или множество функций вида $r^{\alpha_0} (\ln r)^{\alpha_1} (\ln_2 r)^{\alpha_2} \dots (\ln_k r)^{\alpha_k}$, где α_m – вещественные числа, а $\ln_m r$ – это m -тая итерация логарифма. Например, $\ln_2 r = \ln \ln r$.

Пусть $f(r)$ – положительная функция на полуоси $(0, \infty)$. Порядком функции f называется число

$$\rho = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln f(r)}{\ln r}.$$

Важность понятия уточнённого порядка в теории роста функций можно усмотреть из следующей теоремы.

Положительная на полуоси $(0, \infty)$ функция $f(r)$ называется регулярно меняющейся в смысле Караматы, если для любого $\lambda > 0$ существует конечный предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{f(\lambda r)}{f(r)}.$$

Пусть $\rho(t)$ – некоторый уточнённый порядок. На пространстве R_C определяется одно-параметрическое семейство преобразований Азарина $A_t: R_C \rightarrow R_C$, $t \in (0, \infty)$, согласно формулам

$$\mu_t = A_t \mu, \mu_t(E) = \frac{\mu(tE)}{V(t)},$$

Для любого борелевского множества E .

Пусть $\varphi \in \Phi(R_0^n)$. Формула переменных даёт

$$\int_{R_0^n} \varphi(x) d\mu_t(x) = \frac{1}{V(t)} \int_{R_0^n} \varphi\left(\frac{x}{t}\right) d\mu(t). \quad (1)$$

В следующей лемме приводится оценка исключительного множества для меры

Лемма 5.1. Если точки x и y лежат в одной компоненте G_i множества G_η , то эти точки можно соединить цепочкой шаров вида $C(x_s, \alpha_s \|x_s\|)$, $s=1, 2, \dots, m$, где $x_s \in E_\eta \cap G_i$.

Доказательство. Пусть H – множество точек, которые можно соединить цепочкой шаров указанного выше вида с фиксированной $x \in G_i$. Очевидно, что H – открытое.

Лемма 5.2. Пусть $\rho(r)$ – уточнённый порядок, μ – положительная мера из класса $M_\infty(\rho(r))$ и пусть G_η – множество построено указанным выше. Тогда существуют система шаров $C_s := C(x_s, \alpha_s \|x_s\|)$, где $x_s \in G_\eta$, $\alpha_s := \alpha_{x_s}$, покрывающая множество G_η и величина M такая, что для любых $r \geq 1$ и $\eta > 0$ выполняется неравенство

$$\sum_{\|x_s\| \leq r} (\alpha_s \|x_s\|)^{n-1} < M \eta r^{n-1}.$$

Далее определим разделяющие множества для меры в пространстве R^2 и изучим их свойства.

Пусть $n=2$, $C_s = C(z_s, \alpha_s r_s)$ – система кругов, имеющих кратность не выше числа θ_2 . Мы будем использовать следующие характеристики системы:

$$I \dot{H}(r) = \sum_{C_s \cap B(0,r) \neq \emptyset} \alpha_s r_s \leq M \eta r.$$

Имеются место неравенства $r_s(1-\alpha_s) \leq r, r_s \leq 2r$. Тогда из леммы 5.2 следует, что

$$H(r) \leq \sum_{r_s \leq 2r} \alpha_s r_s \leq 2 M \eta r. \quad (5.4)$$

$$2 \dot{\Theta}(r) = \sum_{C_s \cap K(r, 2r) \neq \emptyset} \arcsin \alpha_s \leq \frac{\pi}{2} \sum_{C_s \cap K(r, 2r) \neq \emptyset} \alpha_s \leq \frac{\pi}{2} \eta \sum_{C_s \cap K(r, 2r) \neq \emptyset} \frac{\mu(C_s)}{V(r_s)},$$

где $K(r, 2r) = B(0, 2r) \setminus C(0, r)$, S_1 – единичная окружность в пространстве R^2 . Величина $2 \arcsin \alpha_s$ это угол, под которым круг C_s виден из начала координат. Заметим, что

$$r_s(1-\alpha_s) \leq 2r, r_s \leq 4r, r_s(1+\alpha_s) \leq 6r,$$

$$r_s(1+\alpha_s) \geq r, r_s \geq \frac{2}{3}r, r_s(1-\alpha_s) \geq \frac{1}{3}r.$$

Поэтому

$$\Theta(r) \leq \frac{\pi}{2} M_5 \eta \frac{1}{V(r)} \sum_{C_s \cap K(r, 2r) \neq \emptyset} \mu(C_s) \leq \frac{\pi}{2} \theta_2 M_5 \eta \frac{\mu\left(\left[\frac{1}{3}r, 6r\right] \times S_2\right)}{V(r)} \leq \frac{\pi}{2} \theta_2 M_5 M_6 \eta,$$

где

$$M_5 := \dot{\frac{2}{3}} r \leq t \leq 4r \frac{V(r)}{V(t)}, M_6 := \dot{r} \geq 1 \frac{\mu\left(\left[\frac{1}{3}r, 6r\right] \times S_2\right)}{V(r)}.$$

Из условия $\mu \in M_\infty(\rho(r))$ и неравенства (2.3) следует, что $M_5 < \infty, M_6 < \infty$. Из полученного неравенства следует, что

$$\Theta(r) \leq \frac{\pi}{2} \theta_2 M_5 M_6 \eta = h(\eta). \quad (5.5)$$

Пусть μ – положительная мера из класса $M_\infty(\rho(r))$, m – произвольное натуральное число. Обозначим $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(m) = 2^{2^{-(m+1)}} - 1$, $\eta = \varepsilon_1^2$, E_η – исключительное множество для меры μ , описанное перед этим, M – константа из леммы 5.2. Множество чисел R_k строится таким образом $R_k = (1 - \gamma_k)(1 + \varepsilon_1)^k, k \in N$, где

$\gamma_k \in [0, M\varepsilon_1^2]$, причём γ_k выбирается так, чтобы выполнялось соотношение $\{R_k \times S_{n-1}\} \cap \bigcup_s C_s^i = \emptyset$. Из неравенства 5.4 следует, что такой выбор возможен.

Пусть теперь выбирается такое число m , для которого выполняется неравенство $R_{k+1} > R_k, k \in N$. Это и есть $(1 - \gamma_{k+1})(1 + \varepsilon_1) > (1 - \gamma_k)$, при $k \in N$. Если $\gamma_k \in [0, M\varepsilon_1^2]$, то $1 - \gamma_k \in [1 - M\varepsilon_1^2, 1]$. Тогда число m берётся так, чтобы выполнялось неравенство

$$(1 - M\varepsilon_1^2)(1 + \varepsilon_1^2) > 1, 0 < \varepsilon_1 < \frac{M + \sqrt{M^2 + 4M}}{2M} < 1 + \frac{2}{M},$$

$$2^{2^{-(m+1)}} < 2 + \frac{2}{M}, m > m_0 := (\log_2)_2 \left(2 + \frac{2}{M} \right).$$

Отсюда следует, что если выбираем число m такое, что $m > m_0$, то будут выполняться неравенство $R_{k+1} > R_k, k \in N$. Далее считается, что $m \geq m_0$.

Пусть такой шаровой слой вида $K(R_k, R_{k+1}) - \mathbb{I}$ фиксирован, $C_s := C(x_s, \alpha_s r_s), x_s = (x_s^1, \dots, x_s^n) - \mathbb{I}$ система шаров из леммы 5.2. Обозначим через $C_s(k)$ те шары, лежащие в множество $K(R_k, R_{k+1})$. Из неравенства 5.5 следует, что при $\eta < \min \left\{ \eta_1, \frac{2}{\theta_2 \pi M_5 M_6 \eta} \right\}$ существует счётное множество $M(k) = \{m_1(k), m_2(k), \dots\}$ такое, что $m_i(k) < m_{i+1}(k), m_{i+1}(k) - m_i(k) < 2h(\eta)$ и лучи $L(k) := \{z \in R^2 : \arg z = m_i(k) (i = \overline{1, \infty})\}$ не пересекают круги $C_s(k)$. Далее по математической индукции для множества $K(R_{k+1}, R_{k+2})$ существует лучи $L(k+1)$ такие, что $L(k+1) \cap C_s(k+1) \neq \emptyset$. Построенные последовательность сфер $R_k \times S_2$, лучи $L(k)$ это и есть разделяющие множества для меры μ .

Если $\mu - \mathbb{I}$ вещественная мера из $M_\infty(\rho(r))$, то разделяющие множества для меры $\mu - \mathbb{I}$ это разделяющие множества для меры $|\mu|$.

Теперь вводятся некоторые обозначения. Пусть $\mu \in M_\infty(\rho(r))$, последовательность сфер $R_k \times S_1$ и лучи $L(k)$ разделяющие множества для меры μ .

$$A_1(k) = \{z \in R^2 : \|z\| \in [R_{2k-1}, R_{2k}]\}, A_2(k) = \{z \in R^2 : \|z\| \in [R_{2k}, R_{2k+1}]\},$$

$$B_1(k) = \{z \in R^2 : \arg z \in \mathbb{I} j = 1 \mathbb{I} \omega [m_{2j-1}(k), m_{2j}(k)]\},$$

$$B_2(k) = \{z \in R^2 : \arg z \in \mathbb{I} j = 1 \mathbb{I} \omega [m_{2j}(k), m_{2j+1}(k)]\},$$

$$A_1 = \mathbb{I} k = 1 \mathbb{I} \infty \{A_1(k) \cap B_1(2k-1)\}, A_2 = \mathbb{I} k = 1 \mathbb{I} \infty \{A_2(k) \cap B_1(2k)\},$$

$$A_3 = \mathbb{I} k = 1 \mathbb{I} \infty \{A_1(k) \cap B_2(2k-1)\}, A_4 = \mathbb{I} k = 1 \mathbb{I} \infty \{A_2(k) \cap B_2(2k)\}.$$

Система множеств $A_i (i=1,2,3,4)$ будет покрывать пространство R^2 . Набор криволинейных параллелепипедов вида $\{z \in R^2 : \|z\| \in [R_k, R_{k+1}], \arg z \in [m_j(k), m_{j+1}(k)]\}$, назовём параллелепипедами с соседними местами, если любая окрестность одного из них параллелепипеда будет пересекаться с остальными. Заметим ещё, что во одно множество A_i не входят параллелепипеды с соседними местами. Система множеств A_i будем называть системой разделяющих множеств.

Список литературы

1. Kadets, V.M. (2006), A course of Functional Analysis, Kharkov National University.
2. Van Quynh Nguyen (2015), Various Types of Convergence of Sequences of Subharmonic Functions, Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom, Volume 11, Number 1, 63–74.
3. Nguyen Van Quynh, Theorem on uniform continuity of Logarithmic potential, Visnyk of science and education, Issue 5 (59), 6-10p.
4. Nguyen Van Quynh, Le Anh Thang (2021), THEOREM ON THE REPRESENTATION MEASURES "Мировая наука" №3 (48) 2021.
5. Nguyen Van Quynh, Le Anh Thang (2021), THEOREM ON A COMPACT SET IN THE SPACE OF RADON MEASURES "Мировая наука" №11 (56) 2021.